Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 28./29.10.2008

Analysis III – Funktionentheorie

2. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \mathrm{Re}(z)(z + \mathrm{Im}(z)\mathrm{i})$ und $g(z) = \mathrm{e}^{|z|}$.

(a) Untersuchen Sie f und g auf reelle Differenzierbarkeit und bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$, $\frac{\partial g}{\partial z}(z_0)$ und $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z_0)$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$.

(b) In welchen Punkten sind f bzw. g komplex differenzierbar? Ist f bzw. g, gegebenenfalls nach Einschränkung auf eine geeignete Teilmenge von $\mathbb{C}$, holomorph?

(G 2)

Es sei $r > 0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = re^{it}$ gegeben. Berechnen Sie für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ das Kurvenintegral $\int_\gamma z^n \overline{z}^m \,\mathrm{d}z$.

(G 3)

Es sei γ_1, γ_2 zwei Integrationswege, die durch eine Parametertransformation auseinander hervorgehen und $f : \mathrm{Spur}(\gamma_1) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt $\int_{\gamma_1} f(z) \,\mathrm{d}z = \varepsilon \int_{\gamma_2} f(z) \,\mathrm{d}z$, wobei $\varepsilon = 1$ für eine orientierungserhaltende und $\varepsilon = -1$ für eine orientierungsumkehrende Parametertransformation gilt.

Hausübungen

(H 1)

Seien $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $f, g : \mathrm{Spur}(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt für $c \in \mathbb{C}$

(a) $\displaystyle\int_\gamma (f + g)(z) \,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z + \int_\gamma g(z) \,\mathrm{d}z$, (b) $\displaystyle\int_\gamma cf(z) \,\mathrm{d}z = c \int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z$,

(c) $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z\right| \leq \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot L(\gamma)$.

(H 2)

Es sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ und $f^* : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Zeigen Sie $f^* \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ auf zwei verschiedene Weisen, einmal direkt über den Differenzenquotienten und einmal mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

(H 3)

(a) Auf welchen offenen Mengen $D \subseteq \mathbb{C}$ hat die Funktion $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ eine Stammfunktion?

(b) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ konvex und offen, sowie $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $\mathrm{Im}(f'(z)) < 0$ für alle $z \in G$. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.