



Analysis III – Funktionentheorie

1. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen z in der Form $x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$\text{i) } z = \frac{\overline{2 + 5i}}{1 + 2i}, \quad \text{ii) } z = (1+i)^{8n+3}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{iii) } z = \sum_{k=0}^{101} (3i)^k, \quad \text{iv) } z = \operatorname{Re}(2e^{i\pi/3}).$$

(b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte in \mathbb{C} :

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - 2i}{5 + i} \right)^n \quad \text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \right)^{n!}, \quad \text{iii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1 + i}{2} \right)^k.$$

(G 2)

(a) Für welche Punkte auf dem Rand ihres Konvergenzkreises konvergieren bzw. divergieren die Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n, \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^n?$$

Geben Sie weiter eine Potenzreihe an, die auf dem Rand des Konvergenzkreises sowohl divergentes als auch konvergentes Verhalten aufweist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) := z \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)^2$$

injektiv ist.

(G 3)

(a) Geben Sie Wege $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, die jeweils die einmal positiv durchlaufene Einheitskreislinie als Spur haben.

(b) Weiter betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/z$. Geben Sie das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, das dieser Funktion entspricht, wenn man \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 identifiziert, d.h. mit $F(x, y) = (\operatorname{Re}(f(x + yi)), \operatorname{Im}(f(x + yi)))^T$.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma_2} F(x) \, dx.$$

Hausübungen

(H 1)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

(i) $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im}((1 - i)z) < 0\}$,

(ii) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \operatorname{Im}(z + i)\}$,

(iii) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| + |z + 2i| = 5\}$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ seien Lösungen der Gleichung $z^n = 1$. Zeigen Sie, dass $|\frac{1}{z_1} + \dots + \frac{1}{z_n}| \leq n$ ist und Gleichheit genau dann eintritt, wenn $z_1 = z_2 = \dots = z_n$ gilt.

(H 2)

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

(a) $\sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{7in^4 + 3n}{2n^4 + n^3 + i} \right)^n z^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^n} z^{2n}$ mit $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} z^n$ mit $k \in \mathbb{N}$.

(H 3)

Es sei γ der Weg, der sich aus dem durch $\gamma_1(t) = (t^2, t)^T$, $t \in [0, 1]$, parametrisierten Weg und dem Geradenstück von $(1, 1)$ nach $(1, 2)$ zusammensetzt. Weiter betrachten wir das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $F(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)^T$.

(a) Parametrisieren und skizzieren Sie γ .

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} F(x) \, dx.$$

(c) Geben Sie eine komplexe Parametrisierung des selben Weges (gesehen als Funktion nach \mathbb{C}) an.