Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
16.07.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

16. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 39 – Jordansche Normalform:

1. Welche der folgenden Matrizen sind ein Jordanblock?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Welche der folgenden Matrizen sind in Jordannormalform?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Bestimmen Sie eine Basis, bezüglich derer die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -8 & -4 \\ 2 & 1 & -8 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Jordansche Normalform hat und geben Sie die Jordansche Normalform an.

Lösung:

1. A
2. A, C
3. Das charakt. Polynom ist gegeben mit:

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -8 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & -8 & -4 \\ 1 & 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1)(1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -8 & -4 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & -4 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 1)[(3-\lambda)(-1-\lambda)^2 + 16 - 4(3-\lambda) + 8(-1-\lambda)] \\
&= (\lambda - 1)(-1-\lambda)[(3-\lambda)(-1-\lambda) + 4] \\
&= (\lambda - 1)^3(-1-\lambda)
\end{aligned}$$

Damit sind die Eigenwerte gegeben mit $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Nun sind die verallg. Eigenräume zu bestimmen.

Sei $\sigma_i =$ algeb. Vielfachheit zum EW λ_i und V^{λ_i} der verallg. Eigenvektorraum zum Eigenwert λ_i.
Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\dim V^{\lambda_i} = \sigma_i$$

gilt. D.h. eine Jordankette hat maximal die Länge σ_i.

$$\Rightarrow V^{\lambda_i} = \ker[(A - \lambda_i I)^{\sigma_i}]$$

Für $\lambda_1 = 1$ ist $(A - \lambda_1 I)^3$ gegeben mit

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -32 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -32 & -16 \\ 8 & 0 & -32 & -16 \end{pmatrix}$$

D.h. $\ker[(A - \lambda_i I)^3]$ ist bestimmt durch durch die Gleichung $8x_1 - 32x_3 - 16x_4 = 0$. Eine Basis ist also z.B. mit

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

gegeben. Als nächstes bilden wir Jordanketten zu den Basisvektoren, d.h. Vektoren v_i, die die Eigenschaft d) aus der Vorlesung erfüllen. Durch eine kurze Rechnung bekommen wir

$$JK_{w_1} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), JK_{w_2} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}), JK_{w_3} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

wobei JK_{w_i} die Jordanketten zum Hauptvektor w_i darstellen.

Wir sehen, dass die ersten Vektoren von JK_{w_2} und JK_{w_3} linear abhängig sind. Durch verkürzen von JK_{w_2} bekommen wir eine neue Jordankette mit

$$\widetilde{JK}_{w_2} = (\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-2}{1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$$

Offensichtlich ist die neue Jordankette wiederum lin. abhängig und wir erhalten nach einem erneuten verkürzen von $\widetilde{JK}_{w_2}$ eine Basis (aus Jordanketten) des verallg. Eigenvektorraums von λ_1.

$$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Da $\sigma_2 = 1$, wird für $\lambda_2 = -1$ der verallg. Eigenvektorraum durch einen Eigenvektor aufgespannt. Ein Eigenvektor ist z.B. mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Damit ist die gesuchte Basis (Jordanbasis) mit

$$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

gegeben.

Weiter leitet man entweder aus der Gestalt der Jordanbasis oder durch explizites Berechnen der Matrix $S^{-1}AS$ mit $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ die Jordangestalt der Matrix A mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ab.

Aufgabe 40 – Quadratische Forme:

Bestimmen Sie die Matrix A_f der quadratischen Form

$$f(x,y) = \cos\varphi(x^2 - y^2) + 2(\sin\varphi)xy$$

auf dem $\mathbb{R}^2$. Führen Sie die Hauptachsentransformation für A_f durch.

Lösung: Seien $u := (x_1, y_1), v := (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

Die, durch die quadratische Form definierte, Bilinearform ist gegeben mit:

$$\beta(u,v) := \frac{1}{2}[f(u+v) - f(u) - f(v)]$$

Nach Def. $A_f = (\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ mit $\beta_{i,j} := \beta(e_i, e_j)$ und e_i, e_j Elemente der Einheitsbasis.

$$\Rightarrow A_f = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von A_f ist gegeben mit:

$$\chi_{A_f}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) - \lambda & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Damit hat A_f nach der Hauptachsentransformation die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$