Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
02.07.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

15. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 36 – Minitest:

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ist λ ein Eigenwert von A zu Eigenvektor v, so ist $\overline{\lambda}$ Eigenwert mit Eigenvektor $\overline{v}$.

2) Ähnliche Matrizen haben, das gleiche Charakteristische Polynom, die gleichen Eigenwerte, aber nicht die gleichen Eigenvektoren.

3) Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes ist gleich der geometrischen Vielfachheit.

4) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar. Dann stimmen die geometrische und die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwertes überein.

5) Mit μ_A bzw. χ_A bezeichnen wir das Minimalpolynom bzw. das charakteristische Polynom von $A \in K^{n\times n}$. Es gilt: μ_A teilt χ_A.

6) Es gilt: μ_A^n teilt χ_A.

Lösung: [1)] Richtig. [2)] Richtig. [3)] Falsch. [4)] Richtig. [5)] Richtig [6)] Falsch.

Aufgabe 37 – Charakterische Polynome:

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & 0 \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & \ddots & 0 & \\ & & & & \ddots & 0 \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

wobei $d-1$ mit $1 \leq d \leq n$ die Anzahl der Eisen in der Nebendiagonalen bezeichnet. Sei $e_1, ..., e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$.

1) Berechnen Sie $A(e_i)$.

2) Sei $1 \leq l \leq d$. Berechnen Sie $A^l(e_d)$.

3) Folgern Sie aus 1) und 2) das charakterische Polynom und das Minimalpolynom.

Lösung:

1) $A(e_1) = 0$, $A(e_2) = e_1$, ..., $A(e_d) = e_{d-1}$ und $A(e_i) = 0$ für $i > d$.

2) $A^l(e_d) = A^{l-1}(A(e_d)) = A^{l-1}(e_{d-1}) = ... = e_{d-l}$. Offenbar ist $A^d(e_d) = 0$ und $A^{d-1} \neq 0$.

3) Das charakterische Polynom ist $P_A = t^n$ und das Minimalpolynom ist $\mu_A = t^d$.

Aufgabe 38 – Minimalpolynome:

Bestimmen Sie die Minimalpolynome der folgenden komplexen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\det(A - \lambda I) := \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $P_A = -\lambda(1-\lambda) + 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = \mu_A$.

$$\det(B - \lambda I) := \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $P_A = (2-\lambda)^3(3-\lambda)$. Das Minimalpolynom ist $\mu_A = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$.

Hausaufgabe 28 – Minimalpolynom:

1) Sei K ein Körper und $X = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in K^{(m+n)\times(m+n)}$ eine Blockmatrix mit $A \in K^{m\times m}$, $B \in K^{m\times n}$ und $D \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Polynome gilt: $\chi_X = \chi_A \cdot \chi_D$.

2) Sei $\lambda \in K$. Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome und die Minimalpolynome der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Verallgemeinert sich die Aussage von 1) über charakteristische Polynome auch auf Minimalpolynome?

Lösung:

1) Man sieht leicht ein, dass $X - \lambda Id = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} - \lambda Id = \begin{pmatrix} (A - \lambda Id) & B \\ 0 & (D - \lambda Id) \end{pmatrix}$

   Wir benutzen die Leibnizformel, d.h $\det(X) = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}^n}(sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^n x_{i,\sigma(i)})$ um die Aussage zu beweisen.

   Betrachte einen Summanden der Formel, d.h. $s_\sigma := sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^n x_{i,\sigma}$.

   Falls für $i > m, \sigma(i) \leq m$, so gilt $s_n = 0$. D.h. für jedes $s_n \neq 0$ gilt: $\forall i \leq m, \sigma(i) \leq m$ und $\forall i > m, \sigma_n(i) > m$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \det(X) &= \sum_{\sigma\in\mathbb{S}^{m+n}}(sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^{n+m} x_{i,\sigma(i)}) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathbb{S}^m}(sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^m a_{i,\sigma(i)}) \sum_{\sigma\in\mathbb{S}^n}(sgn(\sigma)\Pi_{i=1}^n b_{i,\sigma(i)}) = \det(A)det(B) \end{aligned}$$

   Zusammen mit der Aussage am Anfang gilt also $\chi_X = \chi_A\chi_B$.

2) $A - \sigma I = \begin{pmatrix} \lambda-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\sigma \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(\sigma) = (\lambda-\sigma)^3, \mu_A(\sigma) = (\lambda-\sigma)$

   $P_B(\sigma) = (\lambda-\sigma)^3, \mu_B(\sigma) = (\lambda-\sigma)^2$

   $P_C(\sigma) = (\lambda-\sigma)^3 = \mu_C(\sigma)$

3) Nein. Ein Gegenbeispiel ist mit der Matrix B aus 2) gegeben. Das Minimalpolynom der Matrix $B_A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ bzw. von $B_D := (\lambda)$ ist gegeben mit $\mu_{B_A} = (\lambda-\sigma)^2$ bzw. mit $\mu_{B_D} = (\lambda-\sigma)$.

Hausaufgabe 29 – Nilpotente Abbildungen:

Sei $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ein selbstadjungierter, nilpotenter Endomorphismus.
Zeigen Sie, dass $F = 0$ ist.
Hinweis: Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *nilpotent* wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^k = 0$ und $A^{k-1} \neq 0$.

1) Zeigen Sie: Ist A nilpotent, so hat sie genau einen Eigenwert, nämlich Null.

2. Zeigen Sie: Ist A nilpotent, so ist entweder $A = 0$ oder A ist nicht diagonalisierbar.

3. Zeigen Sie: Selbstadjungierte Matrizen sind diagonalisierbar.

Lösung:

1) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A, d.h. es ex. ein $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$. Induktiv zeigt man $A^k v = \lambda^k v$.
$$\Rightarrow 0 = 0v = A^k v = \lambda^k v \Rightarrow \lambda = 0$$

2) Falls $A = 0$, so ist nichts zu zeigen.
Sei also A nilpotent und es gelte $A \neq 0$. Wir nehmen an, dass A diagonalisierbar ist. Wegen 1) ist $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von A. D.h. es ex. $S \in GL_n(\mathbb{K})$ mit $S^{-1}AS = 0 \Rightarrow A = 0$. Widerspruch.

3) Zunächst zeigen wir, dass selbstajungierte Matrizen nur reelle Eigenwerte haben. Sei $v \in \mathbb{K}^n$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Wegen
$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle \overset{As.adjun.}{=} \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$
gilt $\lambda = \overline{\lambda}$. Damit ist $\lambda \in \mathbb{R}$.

Weiter gilt $AA^* = A^*A$. D.h. die durch A definierte Abbildung ist ein normaler Endomorphismus, mit reellen Eigenwerte. Damit ist A nach dem Spektralsatz diagonalisierbar sowohl für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, als auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Sei A_F die Matrixdarstellung von F. Wegen 2) und 3) gilt $A_F = 0 \Rightarrow F = 0$.