Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
18.06.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 33 – Minitest:

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Ist λ ein Eigenwert von A zu Eigenvektor v, so ist $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von A^{-1} zum Eigenvektor v.

2) Es gibt keine lineare Abbildung, die den Eigenwert $\lambda = 0$ hat.

3) Es gibt eine lineare Abbildung, die 0 als Eigenvektor hat.

4) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Ist $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0\}$, so hat f den Eigenwert $\lambda = 0$.

5) Besitzen zwei Polynome eine gemeinsame Nullstelle, so sind sie linare Abhängig.

6) Eine orthogonale Abbildung kann nur $\lambda \in \{\pm 1\}$ als Eigenwert haben.

Lösung: [1)] Richtig. [2)] Falsch. [3)] Falsch. [4)] Richtig. [5)] Falsch. [6)] Richtig.

Aufgabe 34 – Eigenwert einfacher Matrizen:

Nennen Sie alle Eigenwerte und deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = i$. Die Dimension des Eigenraumes V_{λ_1} is 2 und die Dimension des Eigenraumes V_{λ_2} is 1. Somit hat der Eigenwert λ_1 die algebraische Vielfachheit 3 und geometrische Vielfachheit 2. Der Eigenwert λ_2 hat die algebraische Vielfachheit 2 und geometrische Vielfachheit 1.

Aufgabe 35 – Diagonalisierbarkeit:

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte mit ihren Eigenvektoren und entscheiden Sie jeweils, ob sie diagonalisierbar sind. Geben Sie die Eigenräume an und im Falle der Diagonalisierbarkeit zusätzlich die Transformationsmatrizen.

$$\left(\pi^2\right), \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Matrix (π^2) hat den Eigenwert $\lambda = \pi^2$ und Eigenvektor $x \in \mathbb{R}$.

Aus dem Ansatz $\det(A - \lambda I)$ folgt

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -4 & -2-\lambda & -5 \\ 4 & 4 & 7-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -4 & -2-\lambda & -5 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -4 & -2-\lambda & -3+\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-3)(1-\lambda)(2-\lambda)
\end{aligned}$$

Somit ist die Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1,\lambda_2 = 2,\lambda_3 = 3$ diagonalisierbar.
Mit dem gleichen Ansatz berechnen Wir die Eigenwerte der dritten Matrix

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} i-\lambda & 1 \\ -1 & 2+i-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-1-i)^2
\end{aligned}$$

Also der Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 + i$.

Hausaufgabe 26 – Eigenwertproblem:

Sei V ein $K-$Vektorraum und $F : V \to V$ linear. Zeigen Sie: Hat $F^2 + F$ den Eigenwert -1, so hat F^3 den Eigenwert 1. Ist ein Eigenvektor von $F^2 + F$ zum Eigenwert -1 auch Eigenvektor von F^3 zum Eigenwert 1?

Lösung: Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert -1, d.h. es gilt: $(F^2 + F)v = -v$. Wegen

$$\begin{aligned} &(F^2 + F)v = -v \\ \Rightarrow &F(F^2 + F)v = F(-v) \\ \Rightarrow &F^3 v = -F^2 v - Fv = -(F^2 + F)v = -(-v) = v \end{aligned}$$

ist v Eigenvektor von F^3 zum Egenwert 1.

Hausaufgabe 27 – Gedämpfte Schwingung:

Ist eine Masse an einer Feder aufgehängt und zur Zeit $t = 0$ in senkrechter Richtung in die Position $y(0) = \alpha$ mit der Geschwindigkeit $\dot{y}(0) = \beta$ ausgelenkt, so ist die weitere Bewegung bestimmt durch die Differentialgleichung der *gedämpften Schwingung*

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0, \qquad y(0) = \alpha,\ \dot{y}(0) = \beta.$$

Dabei sind $\omega, \mu \in \mathbb{R}^+$ Konstanten, ω ist durch die Feder und μ durch die Reibung bestimmt. Man macht daraus mit $y_0 = y$ und $y_1 = \dot{y}$ das lineare System erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y_0} &= y_1, & y_0(0) = \alpha, \\ \dot{y_1} &= -\omega^2 y_0 - 2\mu y_1, & y_1(0) = \beta. \end{aligned}$$

1) Wie sieht die zugehörige Matrix A aus?

2) Eine Diagonalisierung von A entspricht eine Entkopplung des obigen Systems. Betrachten Sie nur den Fall $\mu^2 \geq \omega^2$ und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

3) Bestimmen Sie im Falle einer Diagonalisierbarkeit eine Basis aus Eigenvektoren von A.

4) Geben Sie ferner eine Basis des Lösungsraumes von $\dot{y} = Ay$ an. Wie sieht die Lösung des obigen Systems aus?

Hinweise:
Um Lösungen zu erhalten, kann man den Ansatz

$$y(t) = e^{\lambda t} \cdot v$$

benutzen, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dabei gilt folgendes:

1. $y(t) = e^{\lambda t} \cdot v$ ist eine Lösung $\neq 0$ von $\dot{y} = Ay$ genau dann, wenn v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.
   Beweisen Sie diese Aussage.

2. Lösungen $y^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot v_1, \ldots, y^{(k)}(t) = e^{\lambda_k t} \cdot v_k$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind.

3. Mit $\dot{y} = \frac{d}{dt}y$ bzw. $\ddot{y} = \frac{d^2}{dt^2}y$ wird die erste bzw. zweite Ableitung der Lösung y nach der Zeit bezeichnet.

Insbesondere erhält man mit diesem Ansatz eine Basis des Lösungsraumes, falls A diagonalisierbar ist.

Lösung:

1) Die Matrix ist gegeben mit
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}$$

2) Sei σ_i die geom. Vielfachheit zu einem Eigenwert λ_i mit $i \in \mathbb{N}$
Um die Diagonalisierbarkeit einer Matrix zu zeigen, ist zu prüfen ob eine Basis aus Eigenvektoren existiert. Das ist der Fall, wenn für eine $n \times n$ Matrix die Summe der geom. Viefachheiten gleich n ist, d.h. $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i = n$ gilt.

   i) Es sind zunächst die Eigenwerte zu bestimmen, d.h. alle $\lambda \in \mathbb{R}$ für die die Matrix $A - \lambda Id$ singulär ist. Das ist der Fall, wenn $det(A - \lambda Id) = 0$ gilt.
$$\begin{aligned} 0 &= det(A - \lambda Id) = -\lambda(-2\mu - \lambda) + \omega^2 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda\mu + \omega^2 \\ \Leftrightarrow \lambda &= -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} \end{aligned}$$
   Fall 1: Für $\mu^2 = \lambda^2$ ist der einzige Eigenwert mit $\lambda = -\mu$ gegeben.
   Fall 2: $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$ sonst.

   ii) Bestimme die geom. Vielfachheiten.
   Fall 1: Betrachte den Eigenraum für $\lambda = -\mu$, also alle $v \in \mathbb{R}^2$ mit
$$0 = (A - \mu Id)v = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\omega^2 & -\mu \end{pmatrix} v$$
   Die geom. Vielfachheit ist nur dann gleich 2, wenn $A - \mu Id = 0$. Es folgt $\sigma < 2$. $\Rightarrow$ Für $\mu^2 = \omega^2$ ist A nicht diagonalisierbar.
   Fall 2: Da die Dimension des Eigenraums zu einem gegebenen Eigenwert mind. 1 ist und zwei Eigenwerte existieren, folgt
$$2 \geq \sigma_1 + \sigma_2 \geq 1 + 1$$
   Damit ist A für $\mu^2 > \lambda^2$ diagonalisierbar.

3) Sei wegen 2) $\mu^2 > \omega^2$. Es sind die Eigenräume $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}$ zu den Eigenwerten $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$ zu bestimmen.
Für $\lambda_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$ ist
$$A - \lambda_1 Id = \begin{pmatrix} \mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2} & 1 \\ \omega^2 & -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2} \end{pmatrix}$$
Da die geom. Vielfachheit ($= dim(Ker(A - \lambda_1 Id))$) mind. 1 ist, kann eine der beiden Matrix-Zeilen eliminiert werden und der Eigenraum wird nur durch die Gleichung
$$(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2})v_1 + v_2 = 0$$
mit $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ bestimmt. Damit ist $E_{\lambda_1} = span\{(1, -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega^2})^T\}$
Analog bestimmt man $E_{\lambda_2} = span\{(1, -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2})^T\}$.
Damit ist eine Eigenvektorbasis gegeben mit $B := \{(1, -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2})^T, (1, -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega^2})^T\}$

4) Wegen Hinweis 1) sind zwei Lösungen der DGL mit

$$y^{(1)} = e^{\lambda_1 t)} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega^2}) \end{pmatrix}, y^{(2)} = e^{\lambda_2 t)} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2}) \end{pmatrix}$$

gegeben. Diese sind nach Hinweis 2) linear unabhängig. Eine weitere Lösung, die nicht als Linearkombination von $y^{(1)}, y^{(2)}$ dargestellt werden kann, kann wegen Hinweis 2) nicht existeren. Damit bildet $\{y^{(1)}, y^{(2)}\}$ eine Basis des Lösungsraums der DGL.