Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
04.06.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 30 – Minitest:

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Sei
$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$
Dann ist A die Drehung in $\mathbb{R}^3$ um die y-Achse.

2) Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x, \frac{1}{2}y, 2z)^t$ ist eine Orthogonale Abbildung.

3) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Raum und $U \subset V$ ein Unterraum. Dann gilt $U = (U^\perp)^\perp$.

4) Seien $A := \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 \colon x \in \mathbb{R}\}$ und $B := \{(0,y,0) \in \mathbb{R}^3 \colon y \in \mathbb{R}\}$. Dann ist die direkte Summe $A \oplus B$ die xy-Ebene.

5) Es gibt keine reelle Matrix, die zu sich selbst adjungiert ist.

6) Seien V ein endlich dimensionaler Euklidischer Raum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann ist die direkte Summe $\mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ wohl definiert und es gilt $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Lösung: [1)] Richtig. [2)] Falsch. [3)] Falsch. [4)] Richtig. [5)] Falsch. [6)] Falsch.

Aufgabe 31 – Orthogonale Abbildungen:

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $\forall\, v, w \in \mathbb{R}^n \colon \langle Qv, Qw\rangle = \langle v, w\rangle$.

b) Die Spalten der Matrix Q bilden ein Orthonormalsystem des $\mathbb{R}^n$.

c) $QQ^t = I_n$. (I_n ist die Einheitsmatrix)

Lösung: $a) \Longrightarrow b)$
Diese Richtung ist einfach. Man setzt paarweise die Standardbasis eine die Gleichung ein.
$b) \Longrightarrow c)$
Sei Q_i die i-te Spalte von Q, dann ist $(Q_i)^t$ die i-te Zeile von Q^t. Für das ij-Element $(QQ^t)_{ij}$ gilt
$$(QQ^t)_{ij} = ((Q_i^t)^t)((Q^t)_j)^t = (Q_i)(Q_j)^t = \langle Q_i, Q_j\rangle = \delta_{ij}$$
$c) \Longrightarrow a)$
$$\langle Qv, Qw\rangle = (Qv)(Qw)^t = Qvw^tQ^t = (vw^t)QQ^t = \langle v, w\rangle$$

Aufgabe 32 – Orthogonale Abbildungen:

Sei

$$A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & -14 & 2 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: A ist eine orthogonale Matrix.
Lösung: Man wendet Aufgabe 31 b) an.

Hausaufgabe 24 – Selbstadjungierte Matrizen:

Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = M_n(\mathbb{R})$ der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$ und dessen Teilmenge

$$V := \{A \in V : A^t = A\}.$$

a) Zeigen Sie, dass V ein Untervektorraum von $M_n(\mathbb{R})$ ist.

b) Geben Sie für $n = 2$ eine Basis von V an und bestimmen Sie die Dimension von V.

Lösung: kommt.

Hausaufgabe 25 – Direkte Summe von Unterräumen:

Sei $V = \mathbb{R}^4$ und U, W Unterräume von V mit

$$U := \text{span}\{(1,2,0,1)^t, (3,7,5,0)^t\}, \quad W := \text{span}\{(0,0,0,1)^t, (5,9,7,2)^t\}$$

a) Überprüfen Sie, ob die Summe $U + W$ eine direkte Summe ist.

b) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$.