Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
28.05.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

12. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 27 – Minitest:

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Jeder euklidische Vektorraum besitzt ein Orthonormalsystem.

2) Jeder unitäre Vektorraum besitzt ein Orthonormalsystem.

3) Gegeben seien zwei Orthonormalsysteme B_1 B_2 zu einem euklidischen Vektorraum V. Dann ist entweder $B_1 = B_2$ oder $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

4) Sei $(V, \langle\cdot\rangle)$ ein euklidischer Raum und $U \subset V$ ein Unterraum. Dann versteht man unter dem orthogonalen Komplement von U $U^\perp := \{x \in V : x \perp U, ||x|| = 1\}$.

5) $(0,0,1)^t, (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)^t, (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)^t$ bilden ein Orthonormalsystem des $\mathbb{R}^3$.

6) Die Matrix einer isometrischen linearen Abbildung hat die Determinante 1.

Lösung: [1)] Richtig. [2)] Richtig. [3)] Falsch. [4)] Falsch. [5)] Richtig. [6)] Richtig.

Aufgabe 28 – Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Raum und $x, y \in V$ mit

$$\langle x, y\rangle = ||x|| \cdot ||y||$$

Zeigen Sie: x,y sind linear abhängig.
Lösung: Aus $\langle x, y\rangle = ||x|| \cdot ||y||$ folgt

$$\langle \frac{x}{||x||}, \frac{y}{||y||}\rangle = 1 = \langle \frac{x}{||x||}, \frac{x}{||x||}\rangle$$

und

$$\langle \frac{x}{||x||}, \frac{y}{||y||}\rangle = 1 = \langle \frac{y}{||y||}, \frac{y}{||y||}\rangle$$

Nach Umstellen erhalten wir

$$\langle \frac{x}{||x||}, \frac{y}{||y||} - \frac{x}{||x||}\rangle = 0$$

$$\langle \frac{y}{||y||}, \frac{x}{||x||} - \frac{y}{||y||}\rangle = 0$$

Nach Subtrahieren ergibt

$$\langle \frac{x}{||x||} - \frac{y}{||y||}, 2(\frac{y}{||y||} - \frac{x}{||x||})\rangle = 0$$

Es folgt

$$\langle \frac{x}{||x||} - \frac{y}{||y||}, \frac{x}{||x||} - \frac{y}{||y||}\rangle = 0$$

D.h $x = \frac{||x||}{||y||} \cdot y$.

Aufgabe 29 – Isometrie:

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Raum und $\varphi\colon V \to V$ eine Isometrie, d.h. $\langle\varphi(v), \varphi(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$.

1) Zeigen Sie: Die Abbildung φ ist injektiv. (Hinweis: Indirekter Beweis)

2) Zeigen Sie: Die Abbildung φ ist linear.

Lösung:

1) Angenommen, es gäbe ein $v \neq 0 \in V$ mit $\varphi(v) = 0$. Aus der Voraussetzung folgt $0 = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $w \in V$. Daraus folgt $v = 0$, im Widerspruch zur Annahme.
   Bemerkung: Eine Isometrie zwischen zwei metrischen Rumen ist immer injektiv. Sind die metrischen Rume endlich-dimensional, so ist die Isometrie bijektiv.

2) Sei $u, v, w \in V$. Dann folgt aus der Isometrie sowie der Eigenschaft des Skalarproduktes

$$\langle \lambda\varphi(v), \varphi(u) \rangle = \langle \lambda v, u \rangle$$
$$\langle \mu\varphi(w), \varphi(u) \rangle = \langle \mu w, u \rangle$$

   Durch Addieren der obigen Gleichen erhalten wir für alle $u \in V$

$$\langle \lambda\varphi(v) + \mu\varphi(w), \varphi(u) \rangle = \langle \lambda v + \mu w, u \rangle$$

   Die folgende Gleichung ist gültig

$$\langle \varphi(\lambda v + \mu w), \varphi(u) \rangle = \langle \lambda v + \mu w, u \rangle$$

   Daraus folgt

$$\langle (\lambda\varphi(v) + \mu\varphi(w) - \varphi(\lambda v + \mu w)), \varphi(u) \rangle = 0$$

   Die obige Gleichung für alle $u \in V$ gilt und φ ist injektiv, es muss gelten

$$\lambda\varphi(v) + \mu\varphi(w) - \varphi(\lambda v + \mu w) = 0$$

Hausaufgabe 24 – Gram-Schnmidt-Verfahren:

Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren ein Orthonormalsystem des folgenden Unterraumes des $\mathbb{R}^5$

$$\operatorname{span}(\begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix})$$

Lösung: Seien

$$u_1 := v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

Dann ist (nach Gram-Schmidt) ein $u_2 \in span(v_1, v_2)$ und $u_2 \perp u_1$ gegeben mit

$$u_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Weiter ist ein Vektor $u_3 \perp span(v_1, v_2)$ und $u_3 \in span(v_1, v_2, v_3)$ gegeben mit

$$u_3 := v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0.5\\-0.5\\2\\0\end{pmatrix}$$

Die so gewonnene Orthogonalbasis des Untervektorraums muss nur noch normiert werden.

$$\frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix}0\\0.5\\-0.5\\2\\0\end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 25 – Orthogonale Abbildungen:

Betrachten Sie $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sei $F_\alpha \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Abbildung $z \mapsto \alpha z$.

1) Zeigen Sie: F_α ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.
2) Zeigen Sie, dass $\langle w, z\rangle = \operatorname{Re}(w\overline{z})$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}$ definiert.
3) Bestimmen Sie alle α, für die F_α eine orthogonale Abbildung ist. Erklären Sie Ihr Ergebnis geometrisch.
4) Wie sieht die darstellende Matrix $[F_\alpha]^{(1,i)}_{(1,i)}$ aus?

Lösung: Seien $\lambda \in \mathbb{R}, x, y, z \in \mathbb{C}$

1) z.z. $F_\alpha(x+\lambda y) = F_\alpha(x) + \lambda F_\alpha(y)$

$$F_\alpha(x+\lambda y) = \alpha(x+\lambda y) = \alpha x + \lambda\alpha y = F_\alpha(x) + \lambda F_\alpha(y)$$

2) Es gilt $\langle x, z\rangle = Re(x\overline{z}) = Re(x)Re(z) + Im(x)Im(z) = \langle \begin{pmatrix} Re(x) \\ Im(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Re(y) \\ Im(y) \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}^2}$
Wobei $\langle .,. \rangle_{\mathbb{R}^2}$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ darstellt. Da wir hier $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ betrachten, folgen die drei Eigenschaften des Skalarprodukts aus dem Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

3) Es sind alle $\alpha \in \mathbb{C}$ zu bestimmen für die $\langle F_\alpha(x), F_\alpha(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ gilt

$$\begin{aligned} \langle F_\alpha(x), F_\alpha(y)\rangle &= \langle \alpha x, \alpha y\rangle = Re(\alpha x\overline{\alpha y}) \\ &= Re(\alpha\overline{\alpha}x\overline{y}) = \|\alpha\|^2 Re(x\overline{y}) = \|\alpha\|^2\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

D.h. es gilt $\langle F_\alpha(x), F_\alpha(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ genau dann wenn $\|\alpha\| = 1$

Geometrische Erklärung: In der komplexen Zahlenebene stellt die Abb. F_α eine Drehstreckung dar. Da eine orthogonale Abb. die Norm (durch das Skalarprodukt induzierte Norm) erhält, darf F_α einen Vektor x weder strecken noch stauchen. Dies ist nur für $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\|\alpha\| = 1$ der Fall.

4) $[F_\alpha]^{(1,i)}_{(1,i)} = \begin{pmatrix} Re(\alpha) & -Im(\alpha) \\ Im(\alpha) & Re(\alpha) \end{pmatrix}$