Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
07.05.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

11. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 24 – Minitest:

Definition: Sei V ein reeller Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in V ist eine Bilinearform, die folgenden Bedingungen erfüllt

- symmetrisch $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ für alle $x,y \in V$.
- positiv definit $\langle x,x\rangle > 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$.

In dieser Aufgabe sei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Falls $\det A = 0$ gilt, so ist $\operatorname{Rang} A = 0$.

2) Es gilt $\det \lambda A = \lambda \det A$.

3) Sind zwei Matrizen A und B ähnlich, so ist $\det A = \det B$.

4) Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$, so ist $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

5) Jede reelle, symmetrische und positiv definite Matrix A definiert über
$$\langle x,y\rangle_A = x^T A y$$
ein Skalarprodukt.

6) Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm.

Lösung:

1) Falsch.

2) falsch.

3) Richtig.

4) Falsch.

5) Richtig.

6) Richtig.

Aufgabe 25 – Elementare Matrizen des Gauß-Jordan Algorithmus:

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie nacheinander die Matrizen
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_1$$

und

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot A_2.$$

Beschreiben Sie die Wirkung der Matrixmultiplikation auf die Matrizen A_i.
Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix B, so dass $B \cdot A_3$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
Welchen Rang hat die Matrix A.
Lösung: Es gilt

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mit der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ erhält man über $B \cdot A_3$ die obere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Da A_3 den Rang 3 hat, gilt dies auch für die Matrix A.

Aufgabe 26 – Satz von Thales:

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Raum und $u, v \in V$.

1. Zeigen Sie: $||u|| = ||v||$ genau dann, wenn $\langle u+v, u-v\rangle = 0$.
2. Leiten Sie daraus eine Bedingung ab, wann ein Parallelogramm ein Rhombus ist.
3. Wie folgt daraus der Satz von Thales?
4. Zeigen Sie:
$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}||u+v||^2 - \frac{1}{4}||u-v||^2$$

Lösung:

1. Die Richtung $\Rightarrow$ ist offensichtlich. Es bleibt zu zeigen $\Leftarrow$. $\langle u+v, u-v\rangle = 0 \Rightarrow \langle u, u-v\rangle + \langle v, u-v\rangle = 0 \Rightarrow \langle u, u\rangle - \langle v, v\rangle = 0$.
2. Ein von u, v aufgespanntes Parallelogramm ist ein Rhombus genau dann, wenn die Diagonale senkrecht aufeinander steht.
3. Eckpunkte A,B; den Mittelpunkt M und den Peripheripunkt C. Ansatz:
$$\vec{AM} = \vec{u}, \quad \vec{MC} = \vec{v}$$
$$\vec{AC} = \vec{x} = \vec{AM} + \vec{MC}$$
$$\vec{CB} = \vec{y} = \vec{AM} - \vec{MC}$$
4. $$\frac{1}{4}||u+v||^2 - \frac{1}{4}||u-v||^2 = \frac{1}{4}(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle) = \frac{1}{4}4\langle u, v\rangle$$

Hausaufgabe 20 – Orthogonale Spiegelungen:

Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Ist $v \in V$ ein Einheitsvektor (d.h. $\|v\| = 1$), so wird durch
$$s_v : V \to V, \quad w \mapsto w - 2\langle w, v\rangle v$$
eine Abbildung definiert, die *orthogonale Spiegelung an der zu* v *orthogonalen Hyperebene* heißt. Im Folgenden wollen wir dies erläutern.

a) Zeigen Sie, daß s_v eine lineare Abbildung ist, das Skalarprodukt erhält und daß $s_v \circ s_v = \mathrm{Id}_V$ gilt. Folgern Sie, dass s_v orthogonal ist.

b) Zeigen Sie, dass für alle $w \in \operatorname{span}(v)$ gilt: $s_v(w) = -w$ und für alle $w \in v^\perp$ gilt: $s_v(w) = w$.

Lösung:

a) Seien $u, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. Die drei Eigenschaften werden durch wiederholte Anwendung der Linearität und der Symmetrie des Skalarproduktes gezeigt.
Linearität:
$$s_v(\lambda u + w) = u + w - \langle 2\lambda u + w, v\rangle v = \lambda u - 2\lambda\langle u, v\rangle + w - 2\langle w, v\rangle v = \lambda s_v(u) + s_v(w)$$

s_v erhält Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}\langle s_v(u), s_v(w)\rangle &= \langle u + \langle u, v\rangle v, w + \langle w, v\rangle v\rangle \\ &= \langle u, w\rangle - 4\langle v, u\rangle\langle v, w\rangle + 4\langle v, w\rangle\langle v, u\rangle \underbrace{\langle v, v\rangle}_{=|x|^2=1} \\ &= \langle u, w\rangle\end{aligned}$$

Nach Def. s_v orthogonal.
$s_v \circ s_v = id_V$:

$$\begin{aligned}s_v(s_v(w)) &= w - 2\langle w, v\rangle v - 2\langle w - 2\langle w, v\rangle v, v\rangle v \\ &= w - 2\langle w, v\rangle v - 2(\langle w, v\rangle - 2\langle w, v\rangle\langle v, v\rangle)v \\ &= w - 2\langle w, v\rangle v + 2\langle w, v\rangle v = w\end{aligned}$$

b) $w \in \operatorname{span}(v) \Rightarrow w = \lambda v$, für ein $\lambda \in \mathbb{R}$

$$s_v(w) = s_v(\lambda v) = \lambda v - 2\lambda\langle v, v\rangle v = \lambda v - 2\lambda v = -\lambda v = -w$$

$w \in v^\perp \Rightarrow \langle w, v\rangle = 0$ Nach Einsetzen folgt die Aussage.

Hausaufgabe 21 – Hilberträume:

Sei $l^2 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} | \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$ die Menge aller quadratisch summierbaren Folgen. Wir schreiben im folgenden $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots)$.

a) Zeigen Sie: l^2 wird mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation zu einem komplexen Vektorraum.

b) Zeigen Sie: durch

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i} \qquad \text{wird eine Abbildung } l^2 \times l^2 \to \mathbb{C}$$

definiert, die l^2 zu einem unitären Raum macht.

c) Geben Sie eine Abbildung $\varphi : l_2 \to l_2$ an, die $\langle\cdot,\cdot\rangle$ erhält, aber nicht bijektiv ist.

d) Sei U die Teilmenge von l_2, deren Elemente nur endlich viele von Null verschiedene Einträge haben, d.h.

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2 | \exists N_0 : x_i = 0\,\forall i > N_0\}.$$

Zeigen Sie, daß U ein linearer Teilraum von V ist, für den $(U^\perp)^\perp \neq U$ gilt.

Lösung:

a) Da die Menge $\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{C}\}$ zusammen mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum ist, reicht es zu zeigen, dass l^2 ein Untervektorraum ist.
Seien $(a_i), (b_i) \in l^2, \lambda \in \mathbb{C}$

i. Wegen $\sum_{i=0}^{\infty} 0 < \infty \Rightarrow 0 \in l^2$

ii. z.z. $(a_i + b_i) \in l^2$
Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^2 \overset{Dreiecksungl.}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| + 2|a_i||b_i| + |b_i|$$

Wegen $2|a_i||b_i| \leq |a_i|^2 + |b_i|^2$ (Bew.!) und absoluter Konvergenz der Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ und $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(|a_i|^2 + 2|a_i||b_i| + |b_i|^2) \leq 2 * (\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2}_{<\infty}) < \infty$$

Es folgt: $(a_i + b_i) \in l^2$

iii. z.z. $(\lambda a_i) \in l^2$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda a_i|^2 = |\lambda|^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2}_{<\infty} < \infty$$

Es folgt die Behauptung.

b) Seien $x, y, z \in l^2, \lambda \in \mathbb{C}$. Um den Unterraum zu einem unitären Raum zu erweitern, muss die Abbildung die Eigenschaften des inneren Produktes erfüllen.

i. $\langle x, x\rangle \geq 0$ und $(\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ folgt aus $\overline{x_i} x_i = |x_i|^2$ und den entsprechenden Eigenschaften des Betrags

ii. z.z $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

$$\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\sum_{i=1}^{\infty} y_i \overline{x_i}} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{y_i \overline{x_i}} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} = \langle x, y\rangle$$

iii. z.z. $\langle \lambda x + y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
Sei $\gamma_i := max(|x_i|, |z_i|)$ Wegen:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i \overline{z}_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2$$

konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{z}_i$ absolut. Daraus folgt

$$\langle \lambda x + y, z\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda x_i + y_i)\overline{z_i} \overset{abs.Konv.}{=} \lambda \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{z_i} + \sum_{i=1}^{\infty} y_i \overline{z_i} = \lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

c) Betrachte z.B. $\varphi((x_1, x_2, ...)) = (0, x_1, x_2, ..)$. Sie erhält offensichtlich das Skalarprodukt, ist aber nicht surjektiv.

d) Seien $(a_i), (b_i) \in U, \lambda \in \mathbb{C}$

i. z.z $0 \in U$ - scharfes hinschauen

ii. $(a_i + b_i) \in U$
Seien a_n, b_m die letzten Elemente ungleich 0 und oBdA $n \leq m$. Dann ist für $(a_i + b_i)$ mit $N_0 := n$ das geforderte N_0 gegeben.

iii. z.z $(\lambda a_i) \in U$
(λa_i) hat offensichtlich genau so viele Elemente ungleich 0 wie (a_i) für $\lambda \neq 0$, und kein einziges ungleich 0 für $\lambda = 0$

Die einzige Folge $x \in l^2$ für die $\langle x, y\rangle = 0 \forall y \in U$ gilt, ist offensichtlich die Nullfolge, d.h $U^\perp = \{(0, 0, ...)\}$. Weiter gilt für jede Folge $x \in l^2 : \langle x, 0\rangle = 0$. Daraus folgt $(U^\perp)^\perp = l^2$. Da bspw. die Folge $(1/2^i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2$ mit unendl. vielen von 0 versch. Einträgen, gilt $(U^\perp)^\perp \neq U$