Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
23.04.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 21 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Falls $\det A = \det B$ gilt, so ist $A = B$.
2) Jede reelle Matrix hat eine Determinante.
3) Ist $\det A = 0$, so gilt $A = 0$.
4) Falls $\det A \neq 0$ ist, so besitzt das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ nur die Lösung $x = 0$.
5) Sei A invertierbar. Dann ist $\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$.

Lösung:

1) Falsch.
2) Falsch.
3) Falsch.
4) Richtig.
5) Richtig.

Aufgabe 22 – Determinanten:

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Lösung: $\det A = 3$, $\det B = (x-1)^2(x+2)$

Aufgabe 23 – Van der Monde Matrix:

Sei $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ und wir betrachten die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1) Berechnen Sie $\det A$ für $n = 2$ und $n = 3$.
2) Stellen Sie eine Vermutung über $\det A$ für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$ auf.
3) Beweisen Sie Ihre Vermutung (z.B. anhand vollständiger Induktion mit Gauss-Jordan-Algorithmus).

Lösung:

1) $\det A = x_2 - x_1$ für $n = 2$ und $\det A = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)$ für $n = 3$.

2) Vermutung: $\det A = \Pi_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$ für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$.

3) Beweis durch vollständige Induktion. Induktionsschritt: Angenommen, die Gleichung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. Da $\det A = \det A^t$ betrachten wir A^t. Jetzt subtrahieren wir von der n-ten Zeile das x_0-fache der $(n-1)$-ten Zeile, von der $(n-1)$-ten Zeile das x_0-fache der $(n-2)$-ten Zeile, usw. bis zur 2. Zeile, von der wir das a_0-fache der 1. Zeile subtrahieren. All diese Operationen verändern den Wert der Determinante nicht, da immer nur Vielfache ganzer Zeilen subtrahiert werden.

Wir erhalten dann: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 & ... & x_n - x_0 \\ 0 & x_1^2 - x_1 \cdot x_0 & ... & x_n^2 - x_n \cdot x_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1^n - x_1^{n-1} \cdot x_0 & ... & x_n^n - x_n^{n-1} \cdot x_0 \end{vmatrix}$

Nun subtrahieren wir noch von der 2. bis zur n-ten Spalte die 1. Spalte, es verschwindet dadurch nur die 1 in der ersten Zeile: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & x_1 - x_0 & ... & x_n - x_0 \\ 0 & x_1^2 - x_1 \cdot x_0 & ... & x_n^2 - x_n \cdot x_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1^n - x_1^{n-1} \cdot x_0 & ... & x_n^n - x_n^{n-1} \cdot x_0 \end{vmatrix}$

Außerdem klammern wir in jeder Spalte aus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \cdot (x_1 - x_0) & ... & 0 \cdot (x_n - x_0) \\ 0 & 1 \cdot (x_1 - x_0) & ... & 1 \cdot (x_n - x_0) \\ 0 & x_1 \cdot (x_1 - x_0) & ... & x_n \cdot (x_n - x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1^{n-1} \cdot (x_1 - x_0) & ... & x_n^{n-1} \cdot (x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

Jetzt kann aus der 2. bis zur n-ten Spalte die Differenz ausgeklammert werden.

$$(x_1 - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_0) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 1 \\ 0 & x_1 & ... & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1^{n-1} & ... & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Hausaufgabe 18 – Determinante:

Sei $A, B \in \mathbb{Z}_5^{3 \times 3}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det A$ und $\det B$.

Lösung: $\det A = 0$, denn die zweite und dritte Spalte sind linear abhängig. $\det B = 6$.

Hausaufgabe 19 – Leibnizsche Formel:

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in \mathrm{Sym}\{1,\ldots,n\}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{n,\sigma(n)}.$$

Lösung: Siehe Lehrbücher z.B. *Lineare Algebra* G. Fischer.