Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
02.07.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

15. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 36 – Minitest:

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ist λ ein Eigenwert von A zu Eigenvektor v, so ist $\overline{\lambda}$ Eigenwert mit Eigenvektor $\overline{v}$.

2) Ähnliche Matrizen haben, das gleiche Charakteristische Polynom, die gleichen Eigenwerte, aber nicht die gleichen Eigenvektoren.

3) Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes ist gleich der geometrischen Vielfachheit.

4) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar. Dann stimmen die geometrische und die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwertes überein.

5) Mit μ_A bzw. χ_A bezeichnen wir das Minimalpolynom bzw. das charakteristische Polynom von $A \in K^{n\times n}$. Es gilt: μ_A teilt χ_A.

6) Es gilt: μ_A^n teilt χ_A.

Aufgabe 37 – Charakterische Polynome:

Sei

$$A = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & 0 \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & \ddots & 0 & \\ & & & & \ddots & 0 \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

wobei $d-1$ mit $1 \leq d \leq n$ die Anzahl der Eisen in der Nebendiagonalen bezeichnet. Sei $e_1, ..., e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$.

1) Berechnen Sie $A(e_i)$.

2) Sei $1 \leq l \leq d$. Berechnen Sie $A^l(e_d)$.

3) Folgern Sie aus 1) und 2) das charakterische Polynom und das Minimalpolynom.

Aufgabe 38 – Minimalpolynome:

Bestimmen Sie die Minimalpolynome der folgenden komplexen Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 28 – Minimalpolynom:

1) Sei K ein Körper und $X = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in K^{(m+n)\times(m+n)}$ eine Blockmatrix mit $A \in K^{m\times m}$, $B \in K^{m\times n}$ und $D \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Polynome gilt: $\chi_X = \chi_A \cdot \chi_D$.

2) Sei $\lambda \in K$. Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome und die Minimalpolynome der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Verallgemeinert sich die Aussage von 1) über charakteristische Polynome auch auf Minimalpolynome?

Hausaufgabe 29 – Nilpotente Abbildungen:

Sei $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ein selbstadjungierter, nilpotenter Endomorphismus.
Zeigen Sie, dass $F = 0$ ist.
Hinweis: Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *nilpotent* wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^k = 0$ und $A^{k-1} \neq 0$.

1) Zeigen Sie: Ist A nilpotent, so hat sie genau einen Eigenwert, nämlich Null.

2. Zeigen Sie: Ist A nilpotent, so ist entweder $A = 0$ oder A ist nicht diagonalisierbar.

3. Zeigen Sie: Selbstadjungierte Matrizen sind diagonalisierbar.