Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
18.06.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

14. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 33 – Minitest:

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Ist λ ein Eigenwert von A zu Eigenvektor v, so ist $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von A^{-1} zum Eigenvektor v.

2) Es gibt keine lineare Abbildung, die den Eigenwert $\lambda = 0$ hat.

3) Es gibt eine lineare Abbildung, die 0 als Eigenvektor hat.

4) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Ist $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0\}$, so hat f den Eigenwert $\lambda = 0$.

5) Besitzen zwei Polynome eine gemeinsame Nullstelle, so sind sie linare Abhängig.

6) Eine orthogonale Abbildung kann nur $\lambda \in \{\pm 1\}$ als Eigenwert haben.

Aufgabe 34 – Eigenwert einfacher Matrizen:

Nennen Sie alle Eigenwerte und deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Aufgabe 35 – Diagonalisierbarkeit:

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte mit ihren Eigenvektoren und entscheiden Sie jeweils, ob sie diagonalisierbar sind. Geben Sie die Eigenräume an und im Falle der Diagonalisierbarkeit zusätzlich die Transformationsmatrizen.

$$\left(\pi^2\right), \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2+i \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 26 – Eigenwertproblem:

Sei V ein $K-$Vektorraum und $F : V \to V$ linear. Zeigen Sie: Hat $F^2 + F$ den Eigenwert -1, so hat F^3 den Eigenwert 1. Ist ein Eigenvektor von $F^2 + F$ zum Eigenwert -1 auch Eigenvektor von F^3 zum Eigenwert 1?

Hausaufgabe 27 – Gedämpfte Schwingung:

Ist eine Masse an einer Feder aufgehängt und zur Zeit $t = 0$ in senkrechter Richtung in die Position $y(0) = \alpha$ mit der Geschwindigkeit $\dot{y}(0) = \beta$ ausgelenkt, so ist die weitere Bewegung bestimmt durch die Differentialgleichung der *gedämpften Schwingung*

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0, \qquad y(0) = \alpha,\ \dot{y}(0) = \beta.$$

Dabei sind $\omega, \mu \in \mathbb{R}^+$ Konstanten, ω ist durch die Feder und μ durch die Reibung bestimmt. Man macht daraus mit $y_0 = y$ und $y_1 = \dot{y}$ das lineare System erster Ordnung

$$\begin{array}{rcll} \dot{y_0} & = & y_1, & y_0(0) = \alpha, \\ \dot{y_1} & = & -\omega^2 y_0 - 2\mu y_1, & y_1(0) = \beta. \end{array}$$

1) Wie sieht die zugehörige Matrix A aus?

2) Eine Diagonalisierung von A entspricht eine Entkopplung des obigen Systems. Betrachten Sie nur den Fall $\mu^2 \geq \omega^2$ und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

3) Bestimmen Sie im Falle einer Diagonalisierbarkeit eine Basis aus Eigenvektoren von A.

4) Geben Sie ferner eine Basis des Lösungsraumes von $\dot{y} = Ay$ an. Wie sieht die Lösung des obigen Systems aus?

Hinweise:
Um Lösungen zu erhalten, kann man den Ansatz

$$y(t) = e^{\lambda t} \cdot v$$

benutzen, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dabei gilt folgendes:

1. $y(t) = e^{\lambda t} \cdot v$ ist eine Lösung $\neq 0$ von $\dot{y} = Ay$ genau dann, wenn v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.
   Beweisen Sie diese Aussage.

2. Lösungen $y^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot v_1, \ldots, y^{(k)}(t) = e^{\lambda_k t} \cdot v_k$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind.

3. Mit $\dot{y} = \frac{d}{dt}y$ bzw. $\ddot{y} = \frac{d^2}{dt^2}y$ wird die erste bzw. zweite Ableitung der Lösung y nach der Zeit bezeichnet.

Insbesondere erhält man mit diesem Ansatz eine Basis des Lösungsraumes, falls A diagonalisierbar ist.