Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
28.05.2009

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

12. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 27 – Minitest:

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Jeder euklidische Vektorraum besitzt ein Orthonormalsystem.

2) Jeder unitäre Vektorraum besitzt ein Orthonormalsystem.

3) Gegeben seien zwei Orthonormalsysteme B_1, B_2 zu einem euklidischen Vektorraum V. Dann ist entweder $B_1 = B_2$ oder $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

4) Sei $(V, \langle\cdot\rangle)$ ein euklidischer Raum und $U \subset V$ ein Unterraum. Ferner sei $U^\perp$ das orthogonale Komplement von U. Dann gilt $U^\perp := \{x \in V : x \perp U, ||x|| = 1\}$.

5) $(0,0,1)^t, (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)^t, (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)^t$ bilden ein Orthonormalsystem des $\mathbb{R}^3$.

6) Die Matrix einer isometrischen linearen Abbildung hat die Determinante 1.

Aufgabe 28 – Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Raum und $x, y \in V$ mit

$$\langle x, y\rangle = ||x|| \cdot ||y||$$

Zeigen Sie: x,y sind linear abhängig.

Aufgabe 29 – Isometrie:

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Raum und $\varphi\colon V \to V$ eine Isometrie, d.h. $\langle\varphi(v), \varphi(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$.

1) Zeigen Sie: Die Abbildung φ ist injektiv. (Hinweis: Indirekter Beweis)

2) Zeigen Sie: Die Abbildung φ ist linear.

Hausaufgabe 22 – Gram-Schnmidt-Verfahren:

Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren ein Orthonormalsystem des folgenden Unterraumes des $\mathbb{R}^5$

$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

Hausaufgabe 23 – Orthogonale Abbildungen:

Betrachten Sie $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sei $F_\alpha \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Abbildung $z \mapsto \alpha z$.

1) Zeigen Sie: F_α ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

2) Zeigen Sie, dass $\langle w, z\rangle = \operatorname{Re}(w\overline{z})$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}$ definiert.

3) Bestimmen Sie alle α, für die F_α eine orthogonale Abbildung ist. Erklären Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

4) Wie sieht die darstellende Matrix $[F_\alpha]^{(1,i)}_{(1,i)}$ aus?