Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
07.05.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 24 – Minitest:

Definition: Sei V ein reeller Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in V ist eine Bilinearform, die folgenden Bedingungen erfüllt

- symmetrisch $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ für alle $x, y \in V$.
- positiv definit $\langle x, x \rangle > 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$.

In dieser Aufgabe sei $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Falls $\det A = 0$ gilt, so ist $\operatorname{Rang} A = 0$.
2) Es gilt $\det \lambda A = \lambda \det A$.
3) Sind zwei Matrizen A und B ähnlich, so ist $\det A = \det B$.
4) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$, so ist $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
5) Jede reelle, symmetrische und positiv definite Matrix A definiert über
$$\langle x, y \rangle_A = x^T A y$$
ein Skalarprodukt.
6) Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm.

Aufgabe 25 – Elementare Matrizen des Gauß-Jordan Algorithmus:

Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gegeben durch
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie nacheinander die Matrizen
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_1$$
und
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot A_2.$$
Beschreiben Sie die Wirkung der Matrixmultiplikation auf die Matrizen A_i.
Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix B, so dass $B \cdot A_3$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
Welchen Rang hat die Matrix A.

Aufgabe 26 – Satz von Thales:

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Raum und $u, v \in V$.

1. Zeigen Sie: $||u|| = ||v||$ genau dann, wenn $\langle u+v, u-v\rangle = 0$.
2. Leiten Sie daraus eine Bedingung ab, wann ein Parallelogramm ein Rhombus ist.
3. Wie folgt daraus der Satz von Thales?
4. Zeigen Sie:
$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}||u+v||^2 - \frac{1}{4}||u-v||^2$$

Hausaufgabe 20 – Orthogonale Spiegelungen:

Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Ist $v \in V$ ein Einheitsvektor (d.h. $\|v\| = 1$), so wird durch
$$s_v : V \to V, \quad w \mapsto w - 2\langle w, v\rangle v$$
eine Abbildung definiert, die *orthogonale Spiegelung an der zu* v *orthogonalen Hyperebene* heißt. Im Folgenden wollen wir dies erläutern.

a) Zeigen Sie, daß s_v eine lineare Abbildung ist, das Skalarprodukt erhält und daß $s_v \circ s_v = \mathrm{Id}_V$ gilt. Folgern Sie, dass s_v orthogonal ist.

b) Zeigen Sie, dass für alle $w \in \operatorname{span}(v)$ gilt: $s_v(w) = -w$ und für alle $w \in v^\perp$ gilt: $s_v(w) = w$.

Hausaufgabe 21 – Hilberträume:

Sei $l^2 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} | \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$ die Menge aller quadratisch summierbaren Folgen. Wir schreiben im folgenden $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots)$.

a) Zeigen Sie: l^2 wird mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation zu einem komplexen Vektorraum.

b) Zeigen Sie: durch
$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \qquad \text{wird eine Abbildung } l^2 \times l^2 \to \mathbb{C}$$
definiert, die l^2 zu einem unitären Raum macht.

c) Geben Sie eine Abbildung $\varphi : l_2 \to l_2$ an, die $\langle\cdot,\cdot\rangle$ erhält, aber nicht bijektiv ist.

d) Sei U die Teilmenge von l_2, deren Elemente nur endlich viele von Null verschiedene Einträge haben, d.h.
$$U := \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2 | \exists N_0 : x_i = 0 \, \forall i > N_0\}.$$
Zeigen Sie, daß U ein linearer Teilraum von V ist, für den $(U^\perp)^\perp \neq U$ gilt.