Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
23.04.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 21 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Falls $\det A = \det B$ gilt, so ist $A = B$.
2) Jede reelle Matrix hat eine Determinante.
3) Ist $\det A = 0$, so gilt $A = 0$.
4) Falls $\det A \neq 0$ ist, so besitzt das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ nur die Lösung $x = 0$.
5) Sei A invertierbar. Dann ist $\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$.

Aufgabe 22 – Determinanten:

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Aufgabe 23 – Van der Monde Matrix:

Sei $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ und wir betrachten die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1) Berechnen Sie $\det A$ für $n = 2$ und $n = 3$.
2) Stellen Sie eine Vermutung über $\det A$ für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$ auf.
3) Beweisen Sie Ihre Vermutung (z.B. anhand vollständiger Induktion mit Gauss-Jordan-Algorithmus).

Hausaufgabe 18 – Determinante:

Sei $A, B \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det A$ und $\det B$.

Hausaufgabe 19 – Leibnizsche Formel:

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}\{1,\dots,n\}} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$