Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
17. Juli 2009

13. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und UI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $r \in [-1, 1)$. Durch die Menge

$$K_r = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, \, x_1 \leq r\right\}$$

wird eine Kugelkappe der Einheitskugel beschrieben. Veranschaulichen Sie diese Menge mit Hilfe einer Skizze und bestimmen Sie das Volumen von K_r.

Lösung: Wie in der Vorlesung definieren wir

$$\begin{aligned} B_1 &= [-1, r], \\ b_2(x_1) &= \sqrt{1 - x_1^2}, \quad x_1 \in K_1 \\ B_2 &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in K_1, |x_2| \leq b_2(x_1)\right\} \\ b_3(x_1, x_2) &= \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in K_2, \end{aligned}$$

Dann gilt

$$K_r = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in K_2, |x_3| \leq b_3(x_1, x_2)\right\}.$$

Also ist K_r ein Normalbereich. Damit gilt

$$\mathrm{Vol}(K_r) = \int_{-1}^{r} \pi(1 - x_1^2) \, dx_1 = \pi \left[x_1 - \frac{1}{3}x_1^3\right]_{-1}^{r} = \pi \left(r(1 - \frac{1}{3}r^2) + \frac{2}{3}\right).$$

Aufgabe G2

Berechnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes den Wert des Integrals

$$I_R = \int_{B_R} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) d(x,y)$$

in Abhängigkeit von R. Der Integrationsbereich ist dabei die Kreisscheibe vom Radius R mit Mittelpunkt $(0,0)$:

$$B_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\right\}.$$

Berechnen Sie weiterhin den Grenzwert $\lim_{R\to\infty} I_R$.

Hinweis: Verwenden Sie die Transformation (Polarkoordinaten)

$$g : [0,\infty[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R}^2, \quad g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es gilt:

$$J_g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Daher folgt

$$\det J_g(r,\varphi) = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r.$$

Mit der Transformationsformel ergibt sich

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp(-\frac{r^2}{2}) r \, d\varphi dr = 2\pi \int_0^R \exp(-\frac{r^2}{2}) r \, dr = 2\pi \left[-\exp(-\frac{r^2}{2})\right]_0^R \\ &= 2\pi \left[1 - \exp(-\frac{R^2}{2})\right]. \end{aligned}$$

Also gilt $\lim_{R\to\infty} I_R = 2\pi$.

Hausübung

Keine Abgabe

Aufgabe H1

Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der unterhalb der Fläche

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in [0,2]^2, z = xy^2 + y^3\right\}$$

und oberhalb des Quadrats

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in [0, 2]^2, z = 0\right\}$$

liegt.

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(K) &= \int_0^2 \int_0^2 \int_0^{xy^2+y3} dzdydx = \int_0^2 \int_0^2 xy^2 + y^3 \, dydx = \int_0^2 \left[\frac{1}{3}xy^3 + \frac{1}{4}y^4\right]_0^2 dx \\ &= \int_0^2 \frac{8}{3}x + 4 \, dx = \left[\frac{4}{3}x^2 + 4x\right]_0^2 = \frac{16}{3} + 8 = \frac{40}{3}.\end{aligned}$$

Aufgabe H2

Es sei B der Bereich im ersten Quadranten zwischen den Parabeln $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$. Skizzieren Sie B und berechnen Sie

$$\int_B \sqrt{x}y \, d(x, y).$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int_B \sqrt{x}y \, d(x, y) &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{x}y \, dydx = \int_0^1 \left[\frac{1}{1}2\sqrt{x}y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{9}{2}} \, dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}} - \frac{1}{11}x^{\frac{11}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{11} = \frac{6}{55}.\end{aligned}$$

Aufgabe H3

Der Membranmantel eines Kühlturms K lässt sich als Rotationskörper darstellen. Dabei wird das Hyperbelstück

$$x^2 - z^2 = 1, \quad -1 \leq z \leq 1$$

um die z-Achse gedreht. Stellen Sie die Menge K in kartesischen Koordinaten dar und berechnen Sie dann das Volumen mit Hilfe einer geeigneten Transformation.

Lösung: Es gilt:

$$K = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z \leq 1, \; x^2 + y^2 - z^2 = 1\right\}.$$

Mit Zylinderkoordinaten folgt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(K) &= \int_K dx = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1+z^2}} r\ drdzd\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1+z^2}} dzd\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} 1+z^2\ dzd\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[z+\frac{z^3}{3}\right]_{-1}^{1} d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{4}{3}\ d\varphi = \frac{8}{3}\pi\end{aligned}$$

Aufgabe H4

Sei $a, b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$

Begründen Sie zunächst, wieso E ein Normalbereich ist.
Hinweis: Benutzen Sie die Transformation (verallgemeinerte Polarkoordinaten)

$$g : [0,\infty[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R}^2, \quad g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} ar\cos(\varphi) \\ br\sin(\varphi)\end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir definieren

$$\begin{aligned} E_1 &= [-a, a], \\ e_2(x_1) &= \sqrt{b^2(1-\frac{x_1^2}{a^2})}.\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in B_1, |x_2| \leq e_2(x_1)\right\},$$

also ist E ein Normalbereich. Daher existiert das Integral nach Satz der Vorlesung. Weiterhin gilt:

$$J_g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} a\cos(\varphi) & -ar\sin(\varphi) \\ b\sin(\varphi) & br\cos(\varphi)\end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\det J_g(r,\varphi) = abr\cos^2(\varphi) + abr\sin^2(\varphi) = abr.$$

Mit der Transformationsformel ergibt sich damit:

$$\int_E d(x,y) = \int_0^1\int_0^{2\pi} abr\ d\varphi dr = 2\pi\int_0^1 abr\ dr = 2\pi\left[\frac{abr^2}{2}\right]_0^1 = \pi ab.$$