Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
Dr. M. Slassi

SS 2009
01.7.2009

12. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Gegeben seien die Mengen $G_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ und $G_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$.

(a) Skizzieren Sie die Mengen G_1 und G_2.

(b) Berechnen Sie die Integrale

$$\int\limits_{G_1} y(1-x)\, d(x,y), \quad \int\limits_{G_2} y(1-x)\, d(x,y).$$

Lösung: Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{G_1} y(1-x)\, d(x,y) &= \int_0^1 \int_0^1 (1-x)y\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 (1-x) \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\, dx = \left[-\frac{1}{4}(1-x)^2\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Da y eine ungerade Funktion ist, gilt $\int_{-1}^1 y\, dy = 0$, d.h.

$$\int_{G_2} y(1-x)\, d(x,y) = 0.$$

Aufgabe G2

Haben die folgenden Functionen $f_i : G_i \to \mathbb{R}$ ein globales Maximum oder Minimum?

(a) $f_1 : G_1 = \{(x, y) \mid y \le x\} \to \mathbb{R}, f_1(x, y) = 10x^2 + 5xy - y^2$

(b) $f_2 : G_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\} \to \mathbb{R}, f_2(x, y) = (\sin \sqrt{x^2 + 3 + y})e^{x^2 \tan(y^2+1)}$

Lösung:

(a) Die Funktion f_1“ hat kein globales Maximimum, da $\lim_{x\to\infty} f(x, 0) = \infty$ gilt. Da die Funktion f_1 stets positiv ist, ist der Wert $f(0, 0) = 0$ ein globales Minimum.

(b) Der Definitionsbereich G_2 ist kompakt und die Funktion f_2 stetig. Somit hat f_2 auf G_2 ein globales Maximum und ein globales Minimum.

Aufgabe G3

Es sei durch $Q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x_1 \le 3,\ \ 1 \le x_2 \le 2,\ \ -1 \le x_3 \le 1\}$ und die Dichtefunktion $\rho : Q \to \mathbb{R}, \quad \rho(x_1, x_2, x_3) = x_2(x_1 - 2)^2 \exp(-x_3)$ ein inhomogener Quader gegeben. Berechnen Sie die Gesamtmasse

$$M := \int\limits_Q \rho(x_1, x_2, x_3)\, d(x_1, x_2, x_3)$$

sowie den Schwerpunkt $S = (S_1, S_2, S_3)$, gegeben durch

$$S_i := \frac{1}{M} \int\limits_Q x_i \rho(x_1, x_2, x_3)\, d(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, \dots, 3,$$

des Quaders. Zeigen Sie zunächst, dass die Integrale existieren.

Hinweis: $\frac{d}{dz}\left((z + 1)\exp(-z)\right) = -z \exp(-z)$.

Lösung: Da alle Integranden stetig sind und Q ein Quader, d.h. insbesondere ein

Normalbereich, existieren alle Integrale nach Satz der Vorlesung.

$$
\begin{aligned}
M &= \int_1^3 \int_1^2 \int_{-1}^1 x_2(x_1-2)^2 \exp(-x_3)\ dx_3 dx_2 dx_1 \\
&= \int_1^3 \int_1^2 \left[-x_2(x_1-2)^2 \exp(-x_3)\right]_{-1}^1\ dx_2 dx_1 \\
&= \int_1^3 \int_1^2 x_2(x_1-2)^2(\exp(1)-(\exp(-1))\ dx_2 dx_1 \\
&= \int_1^3 \left[\frac{1}{2}x_2^2(x_1-2)^2(\exp(1)-(\exp(-1))\right]_1^2\ dx_1 \\
&= \int_1^3 \frac{3}{2}(x_1-2)^2(\exp(1)-(\exp(-1))\ dx_1 \\
&= \left[\frac{1}{2}(x_1-2)^3(\exp(1)-(\exp(-1))\right]_1^3 = \exp(1)-(\exp(-1)
\end{aligned}
$$

Analog erhält man:

$$
\begin{aligned}
S_1 =& \frac{1}{M}\int_1^3 x_1(x_1-2)^2\ dx_1 \int_1^2 x_2\ dx_2 \int_{-1}^1 \exp(-x_3)\ dx_3 \\
=& \frac{1}{M}\left[\frac{1}{4}x_1^4 - \frac{4}{3}x_1^3 + 2x_1^2\right]_1^3 \left[\frac{1}{2}x_2^2\right]_1^2 [-\exp(-x_3)]_{-1}^1 = 2 \\
S_2 =& \frac{1}{M}\int_1^3 (x_1-2)^2\ dx_1 \int_1^2 x_2^2\ dx_2 \int_{-1}^1 \exp(-x_3)\ dx_3 \\
=& \frac{1}{M}\left[\frac{1}{3}(x_1-2)^3\right]_1^3 \left[\frac{1}{3}x_2^3\right]_1^2 [-\exp(-x_3)]_{-1}^1 = \frac{14}{9} \\
S_3 =& \frac{1}{M}\int_1^3 (x_1-2)^2\ dx_1 \int_1^2 x_2\ dx_2 \int_{-1}^1 x_3\exp(-x_3)\ dx_3 \\
=& \frac{1}{M}\left[\frac{1}{3}(x_1-2)^3\right]_1^3 \left[\frac{1}{2}x_2^2\right]_1^2 [-(x_3+1)\exp(-x_3)]_{-1}^1 = \frac{-\exp(-1)}{\exp(1)-(\exp(-1)}
\end{aligned}
$$

Hausübung

Freiwillige Abgabe

Aufgabe H1

(a) Sei $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ 3 \le y \le 5\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \cos(2\pi x)e^{3y}.$$

i. Skizzieren Sie Q und entscheiden Sie, ob $\int_Q f(x, y)d(x, y)$ existiert.

ii. Prüfen Sie, ob die iterierten Integrale

$$\int_1^2 [\int_3^5 f(x, y)\, dy]\, dx \quad \text{und} \quad \int_3^5 [\int_1^2 f(x, y)\, dx]\, dy$$

übereinstimmen.

(b) Sei $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x \le 4,\ -1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le \pi\}$. Berechnen Sie

$$\int_G (x^3 y \cos(z) - 3e^x y^2 + 2xy \sin(z))\, d(x, y, z).$$

Lösung:

(a) i. Die Menge Q ist ein Quader, f ist stetig auf Q, also existiert das Integral.

ii. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left[\int_3^5 \cos(2\pi x)e^{3y}\, dy\right] dx &= \int_1^2 \cos(2\pi x) \left[\frac{1}{3}e^{3y}\right]_{y=3}^{y=5} dx \\ &= \frac{1}{3}(e^{15} - e^9) \int_1^2 \cos(2\pi x)\, dx \\ &= \frac{1}{3}(e^{15} - e^9) \left[\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]_{x=1}^{x=2} = 0\end{aligned}$$

und

$$\int_3^5 \left[\int_1^2 \cos(2\pi x)e^{3y}\, dx\right] dy = \int_3^5 e^{3y} \left[\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]_{x=1}^{x=2} dy = 0.$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&\int_G (x^3 y\cos(z) - 3e^x y^2 + 2xy\sin(z))\, d(x,y,z)\\
&= \int_1^4 \int_{-1}^2 \int_0^\pi (x^3 y\cos(z) - 3e^x y^2 + 2xy\sin(z))\, dz\, dy\, dx\\
&= \int_1^4 \int_{-1}^2 \left[x^3 y\sin(z) - 3e^x y^2 z - 2xy\cos(z)\right]_{z=0}^{z=\pi}\, dy\, dx\\
&= \int_1^4 \int_{-1}^2 -3\pi e^x y^2 + 4xy\, dy\, dx\\
&= \int_1^4 \left[-\pi e^x y^3 + 2xy^2\right]_{y=-1}^{y=2}\, dx\\
&= \int_1^4 -9\pi e^x + 6x\, dx\\
&= \left[-9\pi e^x + 3x^2\right]_{x=1}^{x=4} = -9\pi(e^4 - e) + 45.
\end{aligned}
$$

Aufgabe H2

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \exp(x+2y)$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ sowie die Mengen $M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\big\}$ und $N = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \leq 0\big\}$. Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f|_M$ und $f|_N$. Begründen sie dabei zuerst, weshalb globale Minima bzw. Maxima für beide Probleme existieren.

Lösung: Da f stetig ist und M und N kompakt sind, existieren globale Minima/globale Maxima nach Satz der Vorlesung. Wir bestimmen diese zunächst für $f|_M$. Wegen

$$\operatorname{grad} g(x,y) = (2x \;\; 2y)^T = 0$$

gdw. $x = y = 0$ und $(0,0) \notin M$, darf der Satz über Lagrange-Multiplikatoren angewendet werden. Als Kandidaten erhalten wir die Lösungen von

$$L_x = \exp(x+2y) + 2x\lambda \overset{!}{=} 0 \tag{1}$$

$$L_y = 2\exp(x+2y) + 2y\lambda \overset{!}{=} 0 \tag{2}$$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 - 4 \overset{!}{=} 0 \tag{3}$$

Fall 1: $\lambda = 0$. Hier existiert keine Lösung, da $\exp(x+2y) > 0$.
Fall 2: $\lambda \neq 0$. Es gilt

$$2L_x - L_y = 2\lambda(2x - y) = 0,$$

d.h. $x = \frac{y}{2}$. Einsetzen in die 3. Gleichung liefert die Lösungen $(x_1, y_1) = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}})$ und $(x_2, y_2) = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}})$. Wegen $f(x_1, y_1) = \exp(10/\sqrt{5})$ und $f(x_2, y_2) = \exp(-10/\sqrt{5})$, wird das globale Maximum bei (x_1, y_1) und das globale Minimum bei (x_2, y_2) angenommen.

Wir bestimmen zunächst die lokalen Extrema von $f|_N$.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (\exp(x+2y) \;\; 2\exp(x+2y))^T \overset{!}{=} 0.$$

Offensichtlich gibt es keine Lösungen zu diesen Gleichungen. Daher erhalten wir wie oben, dass das globale Maximum bei (x_1, y_1) und das globale Minimum bei (x_2, y_2) angenommen wird.