Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
Dr. M. Slassi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
24.6.2009

11. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} xyz \\ -xyz \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von g.

(b) Ist die Frage nach lokalen Extrema von f sinnvoll? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung:

(a) Wir erhalten:

$$J_g(x,y) = ((\text{grad } g))^T (x,y) = (3x^2 - 3y \;\; 3y^2 - 3x), \quad H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen die kritischen Stellen mittels $(\text{grad } g)(x,y) \stackrel{!}{=} (0 \;\; 0)^T$ und erhalten $(0,0)$ und $(1,1)$ als kritische Stellen. Die Eigenwerte von $H_g(0,0)$ sind ± 3. Da sowohl positive als auch negative Eigenwerte auftreten, liegt in $(0,0)$ kein Extremwert vor. Die Matrix $H_g(1,1)$ besitzt die Eigenwerte 3 und 9. Daher ist sie positiv definit und es liegt in $(1,1)$ ein lokales Minimum vor.

(b) Bei f ist die Frage nach Extremwerten nicht sinnvoll, da $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und Werte in $\mathbb{R}^2$ nicht vergleichbar sind.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie mit Hilfe einer Lagrange-Funktion die Extremalwerte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = xy,$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$. Ist diese Aufgabe auch mit den Methoden aus dem ersten Semester lösbar? Geben Sie gegebenfalls die Vorgehensweise an.

Lösung: Die Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 - 1 \leq 0, \ -(x^2 + 2y^2 - 1) \leq 0\}$ ist nach Vorlesung abgeschlossen und wegen

$$\|(x, y)\|^2 \leq x^2 + y^2 \leq x^2 + 2y^2 - 1 + 1 = 1$$

beschränkt, d.h. M ist kompakt. Da f stetig ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum.
Es gilt $(\text{grad } g)(x, y) = (2x \quad 4y) = (0 \quad 0)$ nur für $(x, y) = (0, 0)$. Da $(0, 0)$ nicht der Nebendingung genügt, kann der Satz aus der Vorlesung angewendet werden. Die Lagrange-Funktion lautet $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$. Damit erhält man

$$L_x(x, y, \lambda) = y + 2\lambda x \overset{!}{=} 0, \tag{1}$$

$$L_y(x, y, \lambda) = x + 4\lambda y \overset{!}{=} 0, \tag{2}$$

$$L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - 1 \overset{!}{=} 0. \tag{3}$$

Fall 1: $\lambda = 0$. Aus $\lambda = 0$ folgt $x = y = 0$ im Widerspruch zur Gleichung (3).

Fall 2: $\lambda \neq 0$. Aus Gleichung 1 ergibt sich $y = -2\lambda x$, Gleichung 2 ergibt $y = -\frac{1}{4\lambda}x$. Also erhält man $\lambda^2 = \frac{1}{8}$ (d.h. $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$) und $y^2 = \frac{1}{2}x^2$. Setzt man dies in die dritte Gleichung ein, erhält man $2x^2 = 1$.

Somit ergeben sich folgende Kandidaten für die lokalen Extrema:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} & y_1 &= \frac{1}{2}, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} & y_2 &= -\frac{1}{2}, \\ x_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & y_3 &= \frac{1}{2}, \\ x_4 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & y_4 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $f(x_1, y_1) = f(x_4, y_4) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $f(x_2, y_2) = f(x_3, y_3) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Damit sind (x_1, y_1) und (x_4, y_4) die Maximalstellen, (x_2, y_2) und (x_3, y_3) die Minimalstellen.
Diese Aufgabe kann auch mit den Methoden aus dem ersten Semester gelöst werden. Hierzu löst man die Nebenbedingung nach x oder y auf und setzt das Ergebnis in f ein. Allerdings muss in diesem Fall eine Fallunterscheidung durchgeführt werden (Beachte: $x = \pm\sqrt{1-2y^2}$). Im Allgemeinen lässt sich allerdings die Nebenbedingung weder nach x noch nach y auflösen.

Aufgabe G3

Bestimmen Sie drei positive Zahlen, deren Summe gleich 90 und deren Quadratsumme minimal ist. Interpretieren Sie das Problem zunächst geometrisch, berechnen Sie dann ein lokales Extremum mit Hilfe einer geeigneten Lagrange-Funktion und begründen Sie dann geometrisch, wieso das gefundene lokale Extremum ein Minimum ist.

Lösung: Setze $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x+y+z-90$. Wegen $(\operatorname{grad} g)(x,y,z) = (1\ \ 1\ \ 1) \neq (0\ \ 0\ \ 0)$, kann der Satz aus der Vorlesung angewendet werden. Die Lagrange-Funktion lautet hier $L(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y+z-90), \lambda \in \mathbb{R}$. Damit ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
L_x(x,y,z,\lambda) &= 2x+\lambda \overset{!}{=} 0,\\
L_y(x,y,z,\lambda) &= 2y+\lambda \overset{!}{=} 0,\\
L_z(x,y,z,\lambda) &= 2z+\lambda \overset{!}{=} 0,\\
L_\lambda(x,y,z,\lambda) &= x+y+z-90 \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Aus den ersten drei Gleichungen erhält man $x = y = z$, somit folgt mit der vierten Gleichung $x = y = z = 30$ und $x^2+y^2+z^2 = 2700$.

Geometrische Interpretation:

Die Menge $M = \{x, y, z \geq 0 : x+y+z = 90\}$ ist der Bereich der Ebene

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x = 30\sqrt{3} \right\},$$

der im ersten Oktanten liegt.

Da weiterhin $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ der euklidische Abstand vom Nullpunkt ist, wird in diesem Minimierungsproblem der Punkt aus M mit minimalem Abstand zum Nullpunkt gesucht.

Also ist der gesuchte Punkt der Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g, die durch den Nullpunkt verläuft und den Normalenvektor der Ebene E als Richtungsvektor besitzt.

(Dies ist auch die einfachste Möglichkeit zu verifizieren, dass die mit dem Lagrange-Ansatz gefundene Lösung $(30, 30, 30)$ minimal ist!)

Hausübung

Aufgabe H1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := x^2 + xy + y^2 + x + y + 1.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema.

Lösung: Es gilt:

$$f_x(x, y) = 2x + y + 1,\ f_y(x, y) = x + 2y + 1,$$
$$f_{xx}(x, y) = f_{yy} = 2,\ f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 1.$$

Der Punkt $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ ist der einzige kritische Punkt. Die Eigenwerte von $H_f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ sind 1 und 3, d.h. $H_f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ ist positiv definit. Daher liegt ein Minimum in $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ vor.

Aufgabe H2

Betrachten Sie zylindrische Dosen. Es bezeichne r den Radius einer Dose und h die Höhe. Die Oberfläche O beträgt dann $O(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ und das Volumen $V(r, h) = \pi r^2 h$. Berechnen Sie die minimale Oberfläche einer Dose mit Hilfe einer Lagrange-Funktion bei einem Dosenvolumen von 1000 Volumeneinheiten.
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass die gefunden Stelle das gesuchte Minimum ist.

Lösung: Wegen $(\text{grad } g)(r, h) = (2\pi rh \quad \pi r^2) \neq (0 \quad 0)$ für $r \neq 0$, darf der Satz aus der Vorlesung angewendet werden (Beachte: $r = 0$ und h beliebig erfüllt die Nebenbedingung nicht). Lagrange-Funktion: $L(r, h, \lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \lambda(\pi r^2 h - 1000)$.
Ableitungen:

$$L_r(r, h, \lambda) = 4\pi r + 2\pi h + \lambda 2\pi rh \stackrel{!}{=} 0,$$
$$L_h(r, h, \lambda) = 2\pi r + \lambda\pi r^2 \stackrel{!}{=} 0,$$
$$L_\lambda(r, h, \lambda) = \pi r^2 h - 1000 \stackrel{!}{=} 0.$$

Umformen der zweiten Gleichung ergibt $\pi r(2+\lambda r) = 0$. Die Lösungen dieser Gleichung sind $r = 0$ und $r = -2/\lambda$. Die Lösung $r = 0$ ist nicht zulässig. Also erhält man mit $\lambda = -2/r$ das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4\pi r - 2\pi h &= 0, \\ \pi r^2 h - 1000 &= 0. \end{aligned}$$

Somit $r_* = 10/\sqrt[3]{2\pi}$, $h_* = 20/\sqrt[3]{2\pi}$ und $O_* = 6\pi r_*^2 \approx 553.58$.