Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009
25. Juni 2009

10. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und UI

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f in allen Punkten, in denen sie existiert (siehe Uebungsblatt 9, G1).

(b) Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} xyz \\ -xyz \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy$$

gegeben. Bestimmen Sie alle der folgenden Ausdrücke, die Sinn machen: $(\operatorname{grad} f)(x,y,z)$, $J_f(x,y,z)$, $H_f(x,y,z)$, $(\operatorname{grad} g)(x,y)$, $J_g(x,y)$, $H_g(x,y)$.

Lösung:

(a) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erhält man:

$$f_{xx}(x,y) = -2\frac{y^3(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad f_{yy}(x,y) = -2\frac{x^2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f_{xy}(x,y) = 2\frac{x^2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = f_{yx}$$

Also

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\frac{y^3(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & 2\frac{x^2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} \\ 2\frac{x^2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & -2\frac{x^2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} \end{pmatrix}$$

Wie in (a) ergibt sich $f_{xx}(0,0) = f_{xy}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0$. $f_{yx}(0,0)$ existiert nicht. Daher existiert die Hesse-Matrix in $(0,0)$ nicht.

(b) Wir erhalten:

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ -yz & -xz & -xy \end{pmatrix}$$

$$J_g(x,y) = ((\text{grad } g))^T(x,y) = (3x^2 - 3y \;\; 3y^2 - 3x), \quad H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

grad f und H_f existieren nicht.

Aufgabe G2

Die Funktion $u : \,]0,\infty[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$u(t,x,y) = (4\pi t)^{-1} \exp\left[-(x^2+y^2)/4t\right].$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}$$

gilt, indem Sie die auftretenden partiellen Ableitungen berechnen.

Bemerkung: Eine Funktion $u : \,]0,\infty[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die die obige Gleichung erfüllt, heißt Lösung der *Wärmeleitungsgleichung*. Mit dieser *partiellen Differentialgleichung* lässt sich die zeitliche Entwicklung einer zur Zeit $t = 0$ vorgegebenen Temperaturverteilung beschreiben.

Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned} u_t(t,x,y) &= -\frac{1}{4\pi t^2}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4t}) + \frac{1}{16\pi t^3}(x^2+y^2)\exp(-\frac{x^2+y^2}{4t}), \\ u_{xx}(t,x,y) &= -\frac{1}{8\pi t^2}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4t}) + \frac{1}{16\pi t^3}x^2\exp(-\frac{x^2+y^2}{4t}), \\ u_{yy}(t,x,y) &= -\frac{1}{8\pi t^2}\exp(-\frac{x^2+y^2}{4t}) + \frac{1}{16\pi t^3}y^2\exp(-\frac{x^2+y^2}{4t}). \end{aligned}$$

Also

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}.$$

Aufgabe G3

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\|v\| = 1$. Berechnen Sie die Richtungsableitung in $(0,0)$ mit dem Differenzenquotienten, d.h.

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f((0,0))}{t}.$$

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\|v\| = 1$. Gilt $\partial_v f(0,0) = \langle \text{grad } f(0,0), v\rangle$?

(c) Wieso darf die Formel aus dem Skript nicht angewendet werden?

Hinweis: Schreiben Sie v in der Form $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Lösung:

(a) Für $\varphi \in [0, 2\pi)$ sei $v = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)}{t} = \cos^2(\varphi)\sin(\varphi).$$

(b) Offensichtlich gilt $\langle \text{grad } f(0,0), v\rangle = 0$ (vgl. Übungsblatt 9, G1). Insbesondere gilt $\partial_v f(0,0) = \langle \text{grad } f(0,0), v\rangle$ i. A. nicht.

(c) Die Voraussetzung „stetig partiell differenzierbar“ ist hier nicht erfüllt (vgl. Übungsblatt 9, G1).

Hausübung

Aufgabe H1

Wir betrachten die Funktion $H\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den drei Komponentenfunktionen

$$\begin{aligned} H_1(x_1,x_2,x_3) &= \cosh(x_1^2 + x_2^2 - x_3), \\ H_2(x_1,x_2,x_3) &= \sqrt{\exp(x_1x_2)}, \\ H_3(x_1,x_2,x_3) &= x_3, \end{aligned}$$

also $H(x_1,x_2,x_3) = (H_1(x_1,x_2,x_3), H_2(x_1,x_2,x_3), H_3(x_1,x_2,x_3))$.

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung der Komponenten H_1, H_2, H_3.

(b) Geben Sie die Funktionalmatrix $J_H(x_1, x_2, x_3)$ an.

(c) Berechnen Sie $\det J_H(0, 1, 1)$.

Lösung:

(a)
$$\begin{array}{ll} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} = 2x_1 \sinh(x_1^2 + x_2^2 - x_3), & \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = 2x_2 \sinh(x_1^2 + x_2^2 - x_3) \\ \frac{\partial H_1}{\partial x_3} = -\sinh(x_1^2 + x_2^2 - x_3), & \frac{\partial H_2}{\partial x_1} = (x_2/2)\sqrt{\exp(x_1 x_2)} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_2} = (x_1/2)\sqrt{\exp(x_1 x_2)}, & \frac{\partial H_2}{\partial x_3} = 0, \ \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 0, \ \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = 1 \end{array}$$

(b) $J_H(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 \sinh(x_1^2 + x_2^2 - x_3) & 2x_2 \sinh(x_1^2 + x_2^2 - x_3) & -\sinh(x_1^2 + x_2^2 - x_3) \\ (x_2/2)\sqrt{\exp(x_1 x_2)} & (x_1/2)\sqrt{\exp(x_1 x_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\det J_H(0, 1, 1) = 0$.

Aufgabe H2

Es seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = -x^2 + 2xy - y^3, \quad g(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}, \quad h(x) = f\left(g(x)\right).$$

(a) Geben Sie die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} an.
Stimmen f_{xy} und f_{yx} überein?

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von h mit der Kettenregel.

(c) Bestimmen Sie $h'(x)$ direkt.

Lösung:

(a) Es gilt:

$$f_x(x, y) = -2x + 2y, \ f_y(x, y) = 2x - 3y^2,$$
$$f_{xx}(x, y) = -2, \ f_{xy}(x, y) = 2 = f_{yx}(x, y), f_{yy}(x, y) = -6y$$

Die gemischten partiellen Ableitungen sind nach dem Satz von Schwartz gleich.

(b) Mit der Kettenregel erhält man:

$$\begin{aligned} h'(x) = J_f(g(x))J_g(x) &= \left(-2\cos(x) + 2\sin(x) \ \ 2\cos(x) - 3\sin^2(x)\right) \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} \\ &= 2(\cos(x)\sin(x) - \sin^2(x) + \cos^2(x)) - 3\cos(x)\sin^2(x). \end{aligned}$$

(c) Es gilt
$$h(x) = -\cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) - \sin^3(x).$$
Daraus ergibt sich $h'(x)$ wie in (b).