Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
30. Juni 2009

9. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und UI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ partiell differenzierbar ist (Differenzenquotient!). Was ist der Gradient von f in $(0,0)$?

(b) In welchen Punkten ist f stetig partiell differenzierbar?

(c) Was können Sie über den Zusammenhang zwischen partieller Differenzierbarkeit und Stetigkeit aussagen?

Lösung:

(a)

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$
$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Also, $(\text{grad f})(0,0) = (0,0)$.

(b) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ folgt die Behauptung aus Mathematik I. Es gilt:

$$(\text{grad f})(x,y) = \begin{pmatrix} 2\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Sei $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$, aber

$$\lim_{n\to\infty} f_x(x_n, y_n) = -2\frac{1/n^4}{(\frac{2}{n^2})^2} = -\frac{1}{2} \neq f_x(0,0),$$

d.h. f_x ist in $(0,0)$ nicht stetig. Mit $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0)$ für $n \in \mathbb{N}$ sieht man, dass f_y in $(0,0)$ nicht stetig ist.

(c) Es besteht kein Zusammenhang zwischen Stetigkeit und partieller Integrierbarkeit (Beachte: f_x ist in $(0,0)$ nicht stetig,aber partiell differenzierbar.

Aufgabe G2

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^2 - y$.

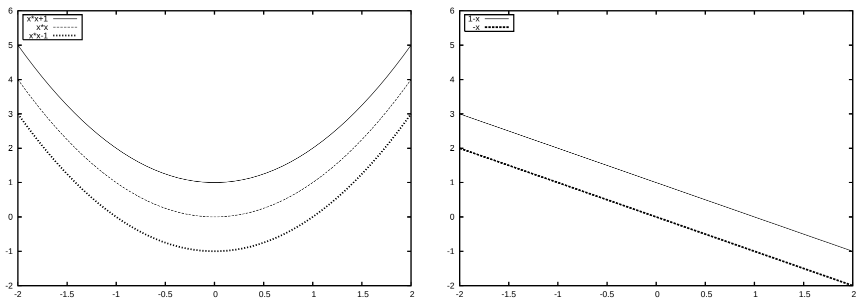
(a) Bestimmen und skizzieren Sie die Schnitte des Funktionsgraphen für $x = -1, 0, 1$, bzw. $y = -1, 0, 1$, d.h. die Graphen der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $y \mapsto f(-1, y)$, $y \mapsto f(0, y)$ und $y \mapsto f(1, y)$ bzw. $x \mapsto f(x, -1)$, $x \mapsto f(x, 0)$ und $x \mapsto f(x, 1)$.

(b) Bestimmen und skizzieren Sie die Niveaumengen von f zu den Niveaus -2, -1, 0, 1 und 2.

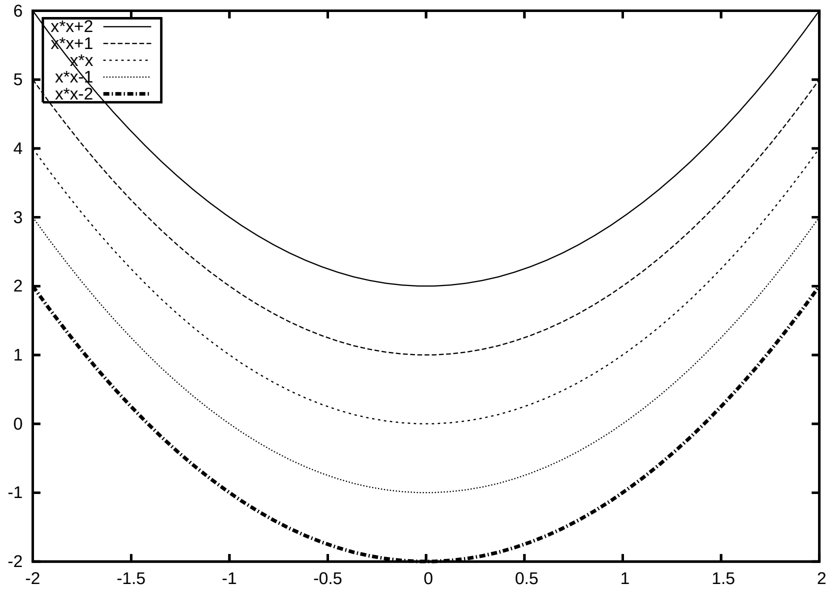
(c) Skizzieren Sie ein 3-dimensionales Bild des Graphen.

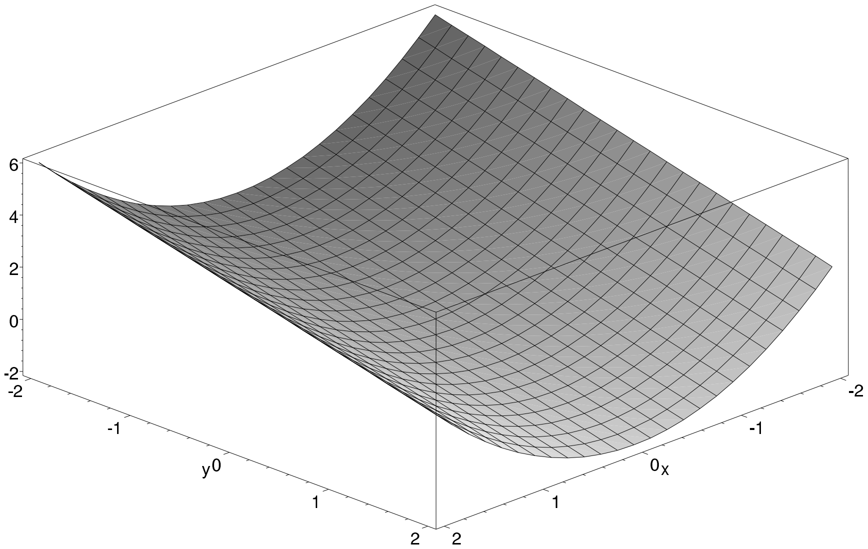
Lösung:

(a)



(b)





(c)

Aufgabe G3

Untersuchen Sie, ob diese Mengen $M_i,\ i = 1, 2$, offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt sind (mit Begründung).

(a) $M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |xy| < 1,\ |x - 1| < 2\}$.

(b) $M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y = 1,\ (x - 1)^2 + y^2 < 4\}$.

(c) Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die Menge $M_3 := f^{-1}\{0\}$ abgeschlossen ist.

Lösung:

(a) Die Menge M_1 ist offen, nicht abgeschlossen, nicht beschränkt nicht kompakt.

(b) Die Menge M_2 ist nicht offen, nicht abgeschlossen, beschränkt, nicht kompakt.

(c) Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in M_3 mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Zu zeigen, dass $x \in M_3$ ist.

$$x_n \in M_3 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) = 0 \quad \text{fuer alle } n \geq 1.$$

Aufgrund der Stetigkeit von f gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x) = 0,$$

das heißt $x \in M_3$

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

a) $f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{xy} & \text{für} \quad x, y \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ *Hinweis:* Ist f_1 auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ stetig? (Beweis?).
Wie verhält sich die Funktion auf ganz $\mathbb{R}^2$ auf der Diagonalen?

b) $f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)2}{x2+y2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Lösung:

(a) Die Funktion f_1 ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ als Quotient stetiger funktionen stetig. Für die Folge $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ folgt $f_1(x_n, y_n) = 2n$, d.h. der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_1(x_n, y_n)$ existiert gar nicht. Somit ist f_1 nicht stetig bei 0.

(b) Es gilt $f_2(x,y) = 1 + \frac{2xy}{x2+y2}$ und somit $\lim_{n\to\infty} f_2(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n2}}{\frac{2}{n2}} = 2 \neq f_2(0,0)$. Daher ist f_2 bei 0 nicht stetig.

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Die Menge $M_2(\mathbb{R})$ der (2×2) Matrizen $(m_{i,j})_{2,2}$ über $\mathbb{R}$ ist ein 4-dimensionaler reeller Vektorraum. Man kann daher die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ auf $M_2(\mathbb{R})$ benutzen.

a) Sind die Projektionen $p_{i,j} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, M \mapsto m_{i,j}$ stetig?

b) Beweisen Sie, daß die Determinante $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung ist.

c) Schließen Sie, daß $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0\}$ eine abgeschlossene Menge ist.

Lösung:

(a) Ja, es gilt nämlich für eine konvergente Folge $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^4$ mit $\vec{x} = lim_{n\to\infty}\vec{x}_n$ auch $lim_{n\to\infty}x_{n,i} = x_i$.

(b) Die Determinante ist als Polynom in den steigen Projektionen $p_{i,j}$ auch wieder stetig.

(c) Diese Menge ist als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Funktion det auch wieder abgeschlossen (z.B. nach Aufgabe G3).