Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
22. Juni 2009

8. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und UI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Bestimmen Sie die passenden Graphen bzw. Höhenlinien zu folgenden Funktionen.

Lösung:

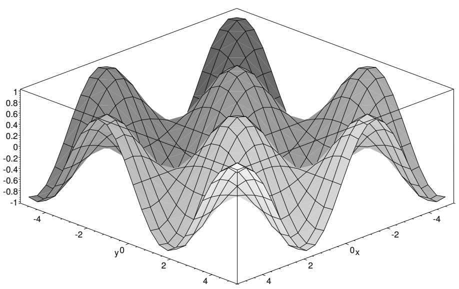

Abbildung 1: $\sin(x) \cdot \sin(y)$

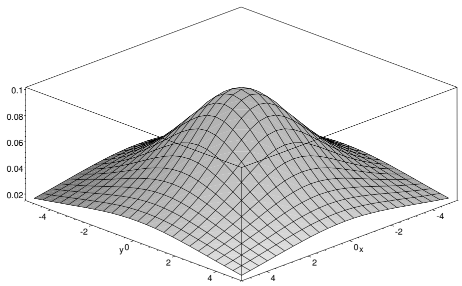

Abbildung 2: $\dfrac{1}{x^2 + y^2 + 10}$

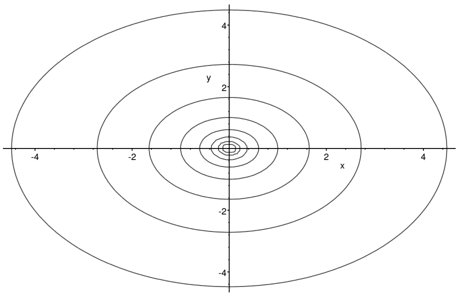

Abbildung 3: $\log(x^2 + y^2)$

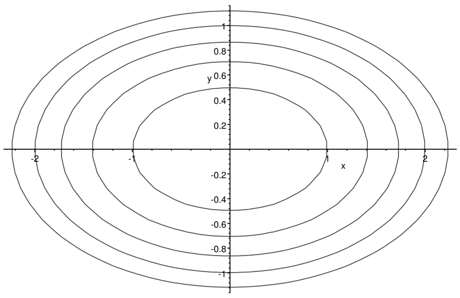

Abbildung 4: $x^2 + 4y^2$

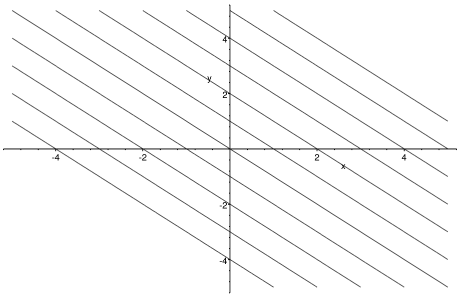

Abbildung 5: $x + y - 1$

Aufgabe G2

Wir betrachten die folgenden Folgen in $\mathbb{R}^2$:

$$a_n := (n \ \ \frac{1}{n})^T \quad b_n := (\frac{1}{n^2} \ \ \frac{n}{1+n})^T \quad c_n := (\frac{1}{n^2} \ \ \frac{1}{n^2})^T \quad d_n := \big(\sin\big(\frac{n\pi}{4}\big) \ \ \cos\big(\frac{n\pi}{4}\big)\big)^T, \quad n \geq 1.$$

(a) Skizzieren Sie diese Folgen. Welche dieser Folgen sind beschränkt?

(b) Welche sind konvergent, welche nicht? Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

(c) Geben Sie zwei weitere Nullfolgen in $\mathbb{R}^2$ an.

Lösung:

(a) Wir benutzen, dass eine Folge in $\mathbb{R}^n$ genau dann beschränkt ist, wenn jede Komponente beschränkt ist (s. Vorlesung). Mit Mathematik I erhalten wir:
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt,
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt,
$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt,
$(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(b) Wir benutzen, dass eine Folge in $\mathbb{R}^n$ genau dann konvergiert, wenn jede Komponente konvergiert (s. Vorlesung). Mit Mathematik I erhalten wir:
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht,
$\lim_{n\to\infty} b_n = (0 \ \ 1)^T$,

$\lim_{n\to\infty} c_n = (0\ \ 0)^T$,
$(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht.

(c) Beispiele für Nullfolgen sind:
$e_n = (\frac{1}{n^3}\ \ \frac{3}{n})^T$, $f_n = (\frac{4}{n}\ \ \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}})^T$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe G3

Es seien die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}, \\ B &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\right\} \quad \text{und} \\ C &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\right\} \end{aligned}$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Mengen.

(b) Welche dieser Mengen sind abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt? Begründen Sie dabei Ihre Aussagen!

(c) Für eine beliebige Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wird die Menge

$$\overline{M} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \text{Es existiert eine Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x.\right\}$$

als *Abschluss* von M bezeichnet. Bestimmen Sie den Abschluss von A, B und C. Was wäre hier genau zu zeigen?

Lösung:

(a)

(b) A ist beschränkt, da für $x \in A$ gilt: $\|x\|^2 \leq 1$.
Behauptung: A ist abgeschlossen.
Beweis Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x. Nach Vorlesung gilt:

$$\|x\| = \lim_{k\to\infty} \|x_k\| \leq \lim_{k\to\infty} 1 = 1, \tag{1}$$

d.h. $x \in A$.
Da A abgeschlossen und beschränkt ist, ist A kompakt.

B ist nicht beschränkt, da $(b_n^1)_{n\in\mathbb{N}} = (n\ \ 2)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ nicht beschränkt ist.
B ist nicht abgeschlossen, da für $(b_n^2)_{n\in\mathbb{N}} = (0\ \ 1 + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ gilt: $\lim_{n\to\infty} b_n^2 = (0\ \ 1) \notin B$.
Da B nicht abgeschlossen ist, ist B auch nicht kompakt.

C ist beschränkt, da

$$\|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 1 + 1 = 2, \quad (x,y) \in C.$$

C ist nicht abgeschlossen, da für $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{2n} \;\; \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ gilt: $\lim_{n\to\infty} c_n = (0 \;\; 0) \notin C$.
Da C nicht abgeschlossen ist, ist C nicht kompakt.

(c) A ist bereits abgeschlossen, d.h. $\overline{A} = A$.

$$\begin{aligned}\overline{B} =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\}.\\ \overline{C} =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.\end{aligned}$$

Zu Zeigen wären zwei Dinge:
1) Für jeden Punkt $x \in \overline{M}$ existiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

2) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine beliebige konvergente Folge. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{M}$.

Hausübung

Aufgabe H1

Es seien

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } D := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche dieser Matrizen sind symmetrisch, positiv definit, negativ definit, bzw. orthogonal?

(b) Was weiß man damit jeweils über die Diagonalisierbarkeit und die Eigenwerte der jeweiligen Matrix?

Hinweis: Eine Matrix A ist genau dann positiv definit wenn $-A$ negativ definit ist (vgl. Definition).

Lösung:

(a) Man erkennt leicht, dass A nicht symmetrisch und B, C und D symmetrisch sind.

Das charakteristische Polynom von A lautet:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda + \frac{2}{3}).$$

Daraus folgt, dass 0 ein Eigenwert von A ist. Insbesondere ist A weder positiv noch negativ definit (s. Vorlesung). Wegen $\det A = p_A(0) = 0 \neq \pm 1$ ist A nicht orthogonal (s. Vorlesung).

Das charakteristische Polynom von B lautet:

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Da ± 1 Eigenwerte von B sind, ist B weder positiv noch negativ definit. B ist orthogonal, da

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{und} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine ONB des $\mathbb{R}^3$ bilden.
ACHTUNG: $\det B = p_b(0) = 1$ reicht NICHT.

Wegen $\det C = 8$ und $\det 3 = 3$ folgt mit der Vorlesung, dass C positiv definit ist. Insbesondere ist C nicht negativ definit und auch nicht orthogonal (wegen $\det C \neq \pm 1$).

Das charakteristische Polynom von D lautet:

$$p_D(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1).$$

D ist weder positiv noch negativ definit, da 0 ein Eigenwert von D ist. Aus dem gleichen Grund ist D nicht orthogonal.

(b) Da B, C, D symmetrisch sind, sind sie diagonalisierbar.

Da C positiv definit ist, folgt $\sigma(C) \subseteq]0, \infty[$, insbesondere ist C invertierbar.

Da B orthogonal ist, ist B invertierbar.

ACHTUNG: Aus symmetrisch folgt NICHT invertierbar.

Aufgabe H2

Untersuchen Sie die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie verschiedene Nullfolgen $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^2$ und untersuchen Sie die Folgen $(f(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

Lösung: Wähle $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ und $b_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = (0,0)$, aber

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = -\frac{1}{2}.$$

Daher ist f in $(0,0)$ nicht stetig. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig.

Aufgabe H3

Wir betrachten den reellen Vektorraum Raum V aller Polynome vom Grad höchstens 2 auf dem Einheitsintervall.

(a) Zeigen sie, dass durch

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

ein Skalarprodukt auf V definiert ist.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis bezüglich dieses Skalarproduktes.
Hinweis: Sie können mit der Basis $1, x, x^2$ beginnen

(c) Bestimmen Sie die Orthogonale Projektion von $f(x) = \sin(x)$ auf V.

Lösung:

(a) Definition: Ein Skalrprodukt auf einem reellen Vektorraum V ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Das heißt: Zu zeigen, dass für alle $p,\ q,\ r \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgenden Bedingungen gelten

i. Bilinear:

$$\begin{aligned}
\langle p+q, r\rangle := \int_0^1 (p(x)+q(x))\,r(x)\,dx &= \int_0^1 p(x)r(x)\,dx + \int_0^1 q(x)r(x)\,dx = \langle p,r\rangle + \langle q,r\rangle \\
\langle p, q+r\rangle &= \langle p,q\rangle + \langle p,r\rangle \\
\langle \lambda p, q\rangle &= \int_0^1 \lambda p(x)q(x)\,dx = \lambda\langle p,q\rangle = \langle p, \lambda q\rangle
\end{aligned}$$

ii. Symmetrisch:

$$\langle p,q\rangle = \langle q,p\rangle.$$

iii. Positiv definite:

$$\langle p,q\rangle = \int_0^1 (p(x))^2\,dx \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle p,p\rangle = 0 \Leftrightarrow p = 0.$$

(b) Wir führen das Gram-Schmidt Verfahren mit der Basis $1, x, x^2$ durch:

i. Da wegen $< 1, 1 >= 1$ das konstante Polynom 1 schon die Norm 1 hat, kann man dieses als ersten Basisvektor v_1 wählen.

ii. Aus $< 1, x >= \frac{1}{2}$ folgt $v_2 = \frac{x-\frac{1}{2}}{\|x-\frac{1}{2}\|} = \sqrt{12}(x - \frac{1}{2})$.

iii. Aus $< 1, x^2 >= \frac{1}{3}$ und $< \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}), x^2 >= \frac{\sqrt{12}}{12} = \frac{1}{\sqrt{12}}$ folgt $v_3 = \frac{x^2-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\|x^2-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\|} = \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3})$.

(c) Die Orthogonale Projektion von $\sin(x)$ auf V ist

$$\langle \sin(x), 1\rangle + \langle \sin(x), v_2\rangle v_2 + \langle \sin(x), v_3\rangle v_3.$$

$$\begin{aligned}
\langle \sin(x), 1\rangle &= 1 - \cos(1) \\
\langle \sin(x), v_1\rangle &= \sqrt{12}\left(\sin(1) - \cos(1) - \frac{1}{2}(1 - \cos(1))\right) \\
\langle \sin(x), v_2\rangle &= \sqrt{180}\left(-\frac{11}{6}\cos(1) + \sin(1) - \frac{11}{6}\right).
\end{aligned}$$