Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
Dr. M. Slassi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
27.5.2009

7. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und UI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden linearen Abbildungen. (Machen Sie sich zuvor die geometrische Bedeutung von Eigenwerten klar.)

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f_1 beschreibt die Spiegelung an der Geraden $G = \mathbf{Lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

(b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, f_2 beschreibt die Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn mit Drehachse $\mathbf{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

(c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, f_3 beschreibt die orthogonale Projektion auf die x_1-Achse.

Lösung:

(a) Die Vektoren $v_1 = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Die Vektoren $v_2 = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (diese Vektoren stehen senkrecht auf $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$) sind Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ (Spiegelung). Da v_1, v_2 eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden, gibt es keine weiteren Eigenvektoren/Eigenwerte.

(b) Die Vektoren $v_1 = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$. Aufgrund der Drehung wird kein anderer Vektor auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet.

(c) Sei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Dann gilt $f_3 e_1 = e_1$, d.h. $\lambda_1 = 1$ ist ein Eigenwert zu den Eigenvektoren $v_1 = \mu e_1$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Desweiteren gilt $f_3 e_j = 0$, $j = 1, 2$. Daher sind $v_2 = \mu e_2 + \nu e_3$, $\mu, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$. Weitere Eigenwerte/Eigenvektoren kann es nicht geben, da e_1, e_2, e_3 bereits eine Basis bilden.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es gilt:

$$\det(A - \lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3(\lambda - 3),$$

also $p_A(\lambda) = (\lambda + 1)^3(\lambda - 3)$. Daher sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$ die Eigenwerte der Matrix A

Aufgabe G3

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A diagonalähnlich? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so daß $T^{-1}AT = D$ gilt.

Lösung:

(a) Es gilt $\det(A - \lambda E) = (4 - \lambda)(1 - \lambda)^2$, also $p_A(\lambda) = (\lambda - 4)(1 - \lambda)^2$.

(b) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$. Die zu λ_i gehörenden Eigenvektoren ergeben sich als Lösung der Gleichungssysteme $(A - \lambda_i E)v_i = 0$, $i = 1, 2$. Zu beachten ist noch, daß der Nullvektor per Definition nie ein Eigenvektor ist. Man berechnet

$$v_1 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad v_2 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) Die Matrix ist nicht diagonalähnlich. Eine Transformationsmatrix T mit den gewünschten Eigenschaften kann nicht gebildet werden. (Nur 2 Eigenvektoren vorhanden, 3 wären aber nötig.)

Hausübung

Aufgabe H1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ so, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2a & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

symmetrisch ist und die Eigenwerte 0, -2 und 2 besitzt. Wie lauten zugehörige Eigenvektoren?

Lösung: Damit die Matrix symmetrisch ist, muß $b = a$ sein. Weiterhin

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2a-\lambda & a \\ 0 & a & -\lambda \end{pmatrix} &= (-\lambda) \cdot \big((2a-\lambda)(-\lambda) - a^2\big) - 2 \cdot (2(-\lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 2a\lambda^2 + (4+a^2)\lambda \\ &= (-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2a\lambda - (4+a^2)). \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2/3} = a \pm \sqrt{2a^2+4}$. Also ist $a = 0$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind:

(a) für $\lambda_1 = 0$, $v_1 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(b) für $\lambda_2 = 2$, $v_2 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

(c) für $\lambda_3 = -2$, $v_3 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe H2 (10 Punkte)

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A diagonalähnlich? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so daß $T^{-1}AT = D$ gilt.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E) &= \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\cdot((-1-\lambda)(2-\lambda)+2(2-\lambda))+2\cdot(-3(2-\lambda)+3(2-\lambda)) \\ &= -(2-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda).\end{aligned}$$

Also ist $P_A(\lambda) = (1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$.

(b) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

$\underline{\lambda_1 = -1}$: In diesem Fall ist $(A+E)v_1 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist

$$v_1 = \mu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$\underline{\lambda_2 = 1}$: Hier ist $(A-E)v_2 = 0$ zu lösen.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit

$$v_2 = \mu\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

$\underline{\lambda_3 = 2}$: Jetzt ist $(A-2E)v_3 = 0$ zu betrachten.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -3 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also

$$v_3 = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) Die Matrix A ist diagonalähnlich.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H3 (10 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{b}_1 = (1\ 1\ 1\ 1)^T$, $\mathbf{b}_2 = (1\ 0\ 1\ 0)^T$ und $\mathbf{b}_3 = (2\ 1\ 1\ 2)^T$. Es sei U der von den Vektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_2$ aufgespannte Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$. Berechnen Sie die orthogonale Projektion des Punktes $\mathbf{b}_4 = (1,1,0,0)^T$ auf den Untervektorraum U.

Lösung: Die Projektion ergibt sich als Summe der Anteile von $\mathbf{b}_4$ an einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ von U. Um eine solche zu erhalten führen wir den Gram-Schmidt Algorithmus mit den Vektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_3$ durch. Hierbei ergeben sich die folgenden Schritte:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= b_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T \\
\mathbf{v}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \\
\mathbf{u}_2 &= b_2 - \langle \mathbf{v}_1, b_2 \rangle \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T - \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \\
\mathbf{v}_2 &= \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \\
\mathbf{u}_3 &= b_3 - \langle \mathbf{v}_1, b_3 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{v}_2, b_3 \rangle \mathbf{v}_2 \\
&= \begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^T - \left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+1\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T - \left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-1\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \\
\mathbf{v}_3 &= \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T
\end{aligned}$$

Folglich ist $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ eine Orthonormalbasis des Untervektorraumes U. Die Anteil von $\mathbf{b}_4$ in Richtung der Basisvektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ des Untervektorraumes U berechnen sich zu

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{b}_4 \rangle = 1 \qquad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{b}_4 \rangle = 0 \qquad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{b}_4 \rangle = 0$$

Somit ist die senkrechte Projektion von $\mathbf{b}_4$ auf U durch $p = 1 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T$ gegeben.