



## 5. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und UI

### Gruppenübung

#### Aufgabe G1

(a) Betrachten Sie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$ .

- i. Zeigen Sie, dass  $v_1, v_2$  bzw.  $w_1, w_2, w_3$  eine Basis des  $\mathbb{R}^2$  bzw. des  $\mathbb{R}^3$  ist.
  - ii. Durch  $\varphi(v_1) = w_1$  und  $\varphi(v_2) = w_2$  wird eine lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert. Berechnen Sie  $\varphi \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ .
  - iii. Geben Sie die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  bezüglich der Basen  $v_1, v_2$  des  $\mathbb{R}^2$  und  $w_1, w_2, w_3$  des  $\mathbb{R}^3$  an.
  - iv. Geben Sie die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  bezüglich der natürlichen Basen an.
- (b) Es sei  $V$  ein Vektorraum,  $a \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Welche der folgenden Abbildungen  $\varphi_i : V \rightarrow V$ ,  $i = 1, \dots, 4$  sind linear?

$$\varphi_1(v) = v + a \quad \varphi_2(v) = \lambda v \quad \varphi_3(v) = a \quad \varphi_4(v) = v + v$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls für den Fall  $V = \mathbb{R}^n$  die Abbildungsmatrizen bezüglich der natürlichen Basis des  $\mathbb{R}^n$ .

**Lösung:**

- (a) i. Die Vektoren  $v_1$  und  $v_2$  sind offensichtlich linear unabhängig, da  $v_1 = \lambda v_2$  für kein  $\lambda \in \mathbb{R}$  gelten kann. Für  $w_1, w_2, w_3$  bestimmen wir den Rang der Matrix, die diese Vektoren als Spalten enthält. Wir berechnen durch Spaltenumformungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Da der Rang dieser Matrix gleich 3 ist, folgt die lineare Unabhängigkeit.

- ii. Da  $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = v_1 + 3v_2$  gilt, folgt wegen der Linearität von  $\varphi$ , dass  $\varphi\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = \varphi(v_1 + 3v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(3v_2) = \varphi(v_1) + 3\varphi(v_2) = w_1 + 3w_2$  gilt. Also

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- iii. Die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  bezüglich der Basis  $\{v_1, v_2\}$  des  $\mathbb{R}^2$  und der Basis  $\{w_1, w_2, w_3\}$  des  $\mathbb{R}^3$  ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- iv. Für die natürliche Basis  $\{e_1, e_2\}$  gilt  $e_1 = 2v_1 - v_2$  und  $e_2 = v_2 - v_1$ . Daher folgt wegen der Linearität von  $\varphi$ , dass

$$\varphi(e_1) = 2\varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 2w_1 - w_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und

$$\varphi(e_2) = w_2 - w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  bezüglich der natürlichen Basis in  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  zu

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

- (b) •  $\varphi_1$  ist linear genau dann, wenn  $a = 0$  gilt. Ist  $a = 0$  so ist  $\varphi_1$  die Identität in  $V$  also linear. Die Abbildungsmatrix ist in diesem Fall daher  $E_n$ . Ist  $a \neq 0$  so ist  $\varphi_1$  wegen  $\varphi_1(0) = a \neq 2a = \varphi_1(0 + 0) = \varphi_1(0) + \varphi_1(0)$  nicht linear.

- $\varphi_2$  ist linear, denn für  $v, w \in V$  und  $s, t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\varphi_2(sv + tw) = \lambda(sv + tw) = \lambda sv + \lambda tw = s\lambda v + t\lambda w = s\varphi_2(v) + t\varphi_2(w).$$

Im Fall  $V = \mathbb{R}^n$  sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  die natürliche Basis in  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $\varphi_2(e_i) = \lambda e_i$  also ist die Abbildungsmatrix von  $\varphi_2$  gegeben durch  $\lambda E_n$ .

- $\varphi_3$  ist linear genau dann, wenn  $a = 0$  gilt. In diesem Fall ist  $\varphi_3(v) = 0$  für alle  $v \in V$ , also auch  $0 = \varphi_3(sv + tw) = s\varphi_3(v) + t\varphi_3(w) = 0$ . Die Abbildungsmatrix in  $\mathbb{R}^n$  ist daher auch gegeben durch die Nullmatrix. Ist  $a \neq 0$  so ist  $\varphi_3$  auch nicht linear, denn  $\varphi_3(0) = a \neq 0$ .
- $\varphi_4$  ist linear, da  $\varphi_4(v) = 2v$ , das heißt dies ist ein Spezialfall von  $\varphi_2$  ( $\lambda = 2$ ).

### Aufgabe G2

Es sei eine Ebene  $E$  im  $\mathbb{R}^3$  durch die Gleichung  $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$  gegeben. Wir wollen die Spiegelung an dieser Ebene betrachten. Das ist eine lineare Abbildung, die wir mit  $f$  bezeichnen.

- Zeigen Sie, dass  $E$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^3$  ist und geben Sie eine Basis  $v_1, v_2$  von  $E$  an.
- Was ist  $f(v_1)$  und  $f(v_2)$ ?
- Geben Sie einen Vektor  $v_3 \notin E$  an, für den  $f(v_3)$  leicht zu bestimmen ist.
- Warum sind die gewählten Vektoren  $v_1, v_2, v_3$  nun eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ ? Geben Sie die Abbildungsmatrix von  $f$  bezüglich dieser Basis an.
- Geben Sie die Abbildungsmatrix von  $f$  bezüglich der natürlichen Basis des  $\mathbb{R}^3$  an.

### Lösung:

- Lösen des LGS  $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$  liefert

$$E = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{Lin} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Damit ist  $E$  offensichtlich ein Unterraum. Eine Basis ist z.B.

$$\left\{ v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Es gilt  $f(v_1) = v_1$  und  $f(v_2) = v_2$ , da diese Vektoren in der Spiegelungsebene liegen.

- (c) Ist  $v_3$  senkrecht zu  $E$ , so gilt  $f(v_3) = -v_3$ . (Das heißt gerade Spiegelung an der Ebene  $E$ !)

Es gilt  $(2 \ -1 \ 1)v_1 = 0 = (2 \ -1 \ 1)v_2$ . Wir wählen daher  $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und es gilt  $f(v_3) = -v_3$ .

- (d) Ist  $v \notin E$  so gilt für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , dass  $\lambda v_1 + \mu v_2 \neq v$ , also sind  $v_1, v_2, v$  linear unabhängig. Da  $v_3 \notin E$  ist  $\{v_1, v_2, v_3\}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ .

Da  $f(v_1) = v_1$ ,  $f(v_2) = v_2$  und  $f(v_3) = -v_3$  folgt, dass die Abbildungsmatrix von  $f$  bzgl. der Basis  $V = \{v_1, v_2, v_3\}$  durch

$$A_{f,V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

gegeben ist.

- (e) Nach Bemerkung 3 in Kap. 5 der Vorlesung ist die Darstellung bzgl. der natürlichen Basis  $E$  von Koordinatenvektoren in  $\mathbb{R}^3$ , die bzgl. der Basis  $V$  gegeben sind, durch

$$T_{EV} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bestimmt.

Die Inverse dieser Matrix ist gegeben durch

$$T_{EV}^{-1} = T_{VE} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildungsmatrix bzgl. der natürlichen Basis ergibt sich nun aus

$$A_{f,E} = T_{EV} A_{f,V} T_{VE} = T_{EV} A_{f,V} T_{EV}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

## Hausübung

### Aufgabe H1

- (a) Die lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei durch

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  bezüglich der natürlichen Basen.

- (b) Sei  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Drehung der Ebene um  $\pi/2$  mit anschließender Spiegelung an der Gerade  $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 2y \right\}$ . Geben Sie die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  bezüglich der natürlichen Basis des  $\mathbb{R}^2$  an.

**Lösung:**

- (a) Die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  bzgl. der Basis  $V = \{v_1, v_2, v_3\}$  in  $\mathbb{R}^3$  und der natürlichen Basis in  $\mathbb{R}^2$  ist gegeben durch

$$A_{\varphi, EV} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix, die Koordinatenvektoren bzgl.  $V$  in Koordinatenvektoren bzgl. der natürlichen Basis in  $\mathbb{R}^3$  überführt, ist gegeben durch (Siehe Kapitel 5, Bemerkung 3)

$$T_{EV} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse dieser Matrix ist

$$T_{VE} = T_{EV}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  bzgl. der natürlichen Basis gegeben durch

$$A_{\varphi, E} = A_{\varphi, EV} T_{VE} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -6 & 8 & 10 \\ 7 & -10 & -9 \end{pmatrix}.$$

- (b) Nach Kap. 5, Beispiel 7 der Vorlesung ist die Abbildungsmatrix der Spiegelung an der Geraden  $G$  gegeben durch

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Nach Kap. 1, Bemerkung 21 der Vorlesung ist die Drehung mit Winkel  $\frac{\pi}{2}$  gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist insgesamt die Abbildungsmatrix von  $\varphi$  bzgl. der natürlichen Basis gegeben durch

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe H2**

Es sei eine Gerade  $G$  im  $\mathbb{R}^3$  gegeben durch  $G = \text{Lin}((1 \ 2 \ 1)^T)$ , und es sei  $f$  die Drehung um die Achse  $G$  mit Winkel  $\pi$ . Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von  $f$  bezüglich der natürlichen Basis.

**Hinweis:** Wie bei Aufgabe G2 ist es hilfreich, erst eine dem Problem angepasste Basis zu wählen. Man überlege sich was  $f$  mit Vektoren aus der Ebene, die durch den Ursprung geht und senkrecht zu  $G$  ist, anstellt.

Bestimmen Sie nun noch die Inverse dieser Matrix.

**Hinweis:** Man kommt dabei ohne Rechnung aus.

**Lösung:** Sei  $v_1 = (1 \ 2 \ 1)^T$ . Da  $f$  eine Drehung um die Gerade  $G$  beschreibt gilt  $f(v_1) = v_1$ . Wir bestimmen nun linear unabhängige Vektoren  $v_2, v_3$ , die senkrecht auf  $G$  stehen. Wir lösen dazu das LGS  $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ . Dies ergibt etwa die Vektoren

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $f$  die Drehung um  $G$  mit Winkel  $\pi$  ist gilt  $f(v_2) = -v_2$  und  $f(v_3) = -v_3$ . Damit ist die Abbildungsmatrix von  $f$  bzgl. der Basis  $V = \{v_1, v_2, v_3\}$  gegeben durch

$$A_{f,V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wie bei Aufgabe G2 bestimmt man

$$T_{EV} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{EV}^{-1} = T_{VE} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Also folgt für die Abbildungsmatrix von  $f$  bzgl. der natürlichen Basis

$$A_{f,E} = T_{EV} A_{f,V} T_{EV}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da die zweifache Anwendung von  $f$  eine Drehung mit Winkel  $2\pi$  ist gilt  $f^2 = Id$ . Das heißt, dass die Inverse Abbildung zu  $f$  wieder  $f$  ist also  $f^{-1} = f$  gilt. Damit ist die Inverse der Matrix  $A_{f,E}$  gegeben durch

$$A_{f,E}^{-1} = A_{f,E} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe H3**

- (a) Geben Sie ein homogenes Gleichungssystem mit drei Unbekannten und zweidimensionalem Lösungsraum.
- (b) Geben Sie zwei verschiedene Basis des Lösungsraumes.

**Lösung:** Gesucht ist eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m,3}$ , sodass die Dimension des Lösungsraums des homogenen Gleichungssytemes  $Ax = 0$  zwei ist. Nach dem Dimensionssatz gilt  $\text{rang}(A) = 1$ . So kann man  $A = (1, 1, 1)$  wählen.

$$\text{Ker}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw. } 2w_1, 2w_2 \text{ bilden zwei verschiedenen Basis.}$$