Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
Dr. M. Slassi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
07.05.2009

4. Übungsblatt zur Mathematik II

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ Diagonalmatrizen, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

mit reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$.

i. Berechnen Sie $A \cdot B$

ii. Für welche Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A invertierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Inverse an.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, so dass $E_n - A$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$(E_n - A)^{-1} = E_n + A(E_n - A)^{-1}$$

(c) Es sei $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix mit $2C = C^2 - E_n$. Zeigen Sie: C ist invertierbar.

Lösung:

(a) Mit $(E_n - A)A = A - A^2 = A(E_n - A)$ folgt

$$\begin{aligned}
(E_n - A)(E_n + A(E_n - A)^{-1}) &= (E_n - A) + (E_n - A)A(E_n - A)^{-1} \\
&= (E_n - A) + A(E_n - A)(E_n - A)^{-1} \\
&= (E_n - A) + A \\
&= E_n \\
&= (E_n - A) + A \\
&= (E_n + A(E_n - A)^{-1})(E_n - A)
\end{aligned}$$

und damit auch die Behauptung.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Cx = 0$. Dann gilt $0 = 2Cx = (C^2 - E_n)x = C^2x - E_nx = x$, also $x = 0$. Damit folgt $\mathbf{Kern}(C) = \{0\}$ und mit Satz 21 folgt, dass C invertierbar ist.

(c) Es gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

Also folgt $A \cdot B = E_n$, genau dann, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ $a_i \neq 0$ und $b_i = \frac{1}{a_i}$ gilt. Daher ist A, falls $a_i \neq 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, invertierbar und es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2

Bestimmen Sie jeweils eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$, so dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ die Lösungsmengen

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ bzw. } E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

hat. **Lösung:**

(a) Die Lösungsmenge G beschreibt eine Gerade in $\mathbb{R}^3$. Das heißt, dass der Rang der Matrix zum gesuchten LGS gleich 2 sein muss. Außerdem muss

$$\ker(A) = \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

gelten. Die Zeilen a_1, a_2 der Matrix werden daher so gewählt, dass $a_1 \cdot (1,1,1)^T = a_2 \cdot (1,1,1)^T = 0$ gilt. Wir setzen A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Für die rechte Seite berechnen wir $(1, -1, 0) \cdot (1, 2, 3)^T = -1$ und $(1, 0, -1) \cdot (1, 2, 3)^T = -2$. Ein LGS das G als Lösungsmenge hat ist damit

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Diesmal muss Rang(A)=1 gelten. Wir suchen A mit

$$\mathbf{Kern}(A) = \mathbf{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Wir wählen $A = (1\ \ -1\ 0)$. (Löse das LGS $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ und $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$). Einsetzen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, d.h. $1-2 = -1$ ergibt $b = -1$. Damit ist E Lösungsmenge des LGS $(1\ \ -1\ 0)x = -1$.

Aufgabe G3

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 42 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es ergeben sich folgende Determinanten:

$\det(A) = 1 \cdot (-5) - (-4) \cdot 3 = 7$ nach Beispiel 2 der Vorlesung

$\det(B) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ nach Satz 3 (vi)

Da $\mathrm{rg}(C) = 2 \neq 3$ gilt, ist C nicht invertierbar. Es folgt mit Satz 3 (iv), dass $\det(C) = 0$ gilt.

Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt nach Satz 5

$$\det(D) = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 13 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Bsp. 2}}{=} 2 \cdot (3-2) = 2$$

Hausübung

Aufgabe H1

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von A und Rang(A).

(b) Lösen Sie (falls möglich) die LGSe $Ax = b$ und $Ax = c$, mit

$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie alle $b \in \mathbb{R}^3$ für die das LGS $Ax = b$ eine Lösung besitzt. (Dazu muss man jetzt nicht mehr rechnen!)

Lösung:

(a) Wir bestimmen den Kern durch Zeilenumformungen von A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\operatorname{rg}(A) = 1$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis des Kerns.

(b) Zeilenumformung mit b bzw. c als rechter Seite ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Damit folgt, dass das LGS $Ax = b$ lösbar, aber das LGS $Ax = c$ nicht lösbar ist. Die Lösungsmenge von $Ax = b$ ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgrund der durchgeführten Zeilenumformungen ist $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn $-2b_1 + b_2 = 0$ und $b_1 + b_2 = 0$ gilt, d.h. $b = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H2

Es seien die drei Punkte $x_0 := (1, 0, 1)^T$, $x_1 = (0, 1, 1)^T$ und $x_2 = (1, 1, 0)^T$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Verifizieren Sie, dass die Vektoren $x_1 - x_0$ und $x_2 - x_0$ linear unabhängig sind.

(b) Betrachten Sie die durch x_0, x_1 und x_2 aufgespannte Ebene

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0);\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Geben Sie ein LGS an, dessen Lösungsmenge E ist.

Lösung:

(a) Es gilt $x_1 - x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $x_2 - x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Da aus $\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, folgt, dass $-\alpha_1 + 0\alpha_2 = -\alpha_1 = 0$ und $0\alpha_1 - \alpha_2 = -\alpha_2 = 0$ gilt, sind $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig.

(b) Aus (a) folgt

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wie bei Aufgabe G2 bestimmt man $A = (1\ 1\ 1)$ und $b = 2$.

Aufgabe H3

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt immer:

Wahr	Falsch	
☐	☐	$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
☐	☐	$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
☐	☐	$\mathrm{Rang}(A \cdot B) = \mathrm{Rang}(A) \cdot \mathrm{Rang}(B)$
☐	☐	$\mathrm{Rang}(A + B) = \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(B)$

Folgende Abbildungen $\varphi : V \to V$ bzw. $\varphi : V \to \mathbb{R}$ sind linear:

Wahr	Falsch	
☐	☐	Der Vektorraum V ist der Vektorraum der reellen Polynome und $\varphi(p) = p'$.
☐	☐	Der Vektorraum $V = C([0, 1])$ ist der Vektorraum aller reellen stetigen funktionen auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$, $x \in [0, 1]$ fix und $[0, 1]$ und $\varphi(f) = f(x)$.
☐	☐	$V = \mathbb{R}$, $\varphi(v) = \sin(v)$.
☐	☐	$V = \mathbb{R}$, $\varphi(v) = 1$.