Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
Dr. M. Slassi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
30.04.2009

3. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Betrachten Sie die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob diese Matrizen in Zeilenstufenform gegeben sind. Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = 3$ lösbar? Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS $Cx = d$ mit $d = (1, 1, 1)^T$.

Lösung: Die Matrizen A und C sind in Zeilenstufenform gegeben. Die Matrix B ist nicht in Zeilenstufenform. Das LGS $Ax = 3$ ist lösbar. Jeder Vektor x mit $x_1 = -2x_2 - 3x_4 + 3$ ist Lösung (z.B. $(0, 0, 0, 1)$). Da der Rang von C gleich 3 ist, hat das LGS $Cx = d$ eine eindeutig bestimmte Lösung. Diese lautet $x = (3, -1, 1)^T$.

Aufgabe G2

Überprüfen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

lösbar sind. Bestimmen Sie jeweils den Rang der Koeffizientenmatrix sowie die Dimension des Lösungsraums. Geben Sie den Lösungsraum an.

Lösung: (1) Die Koeffizientenmatrix A und die erweiterte Matrix (A, b) des ersten Gleichungssystems sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \qquad (A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right).$$

Es gilt $\mathrm{rg}A = 1$ und $\mathrm{rg}(A, b) = 1$, also ist das Gleichungssystem lösbar. Die Dimension des Lösungsraums ist $3 - \mathrm{rg}A = 2$. Insbesondere ist der Lösungsraum gerade $\mathbf{Kern}(A)$. Durch elementare Zeilenumformungen ergibt sich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhält man

$$\begin{aligned} x_3 &= t, \\ x_2 &= s, \\ x_1 + 2s + 3t = 0 \Rightarrow x_1 &= -2s - 3t \end{aligned}$$

für $s, t \in \mathbb{R}$. Der Lösungsraum dieses LGS ist also

$$L_1 = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(2) Beim zweiten Gleichungssystem sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Elementare Zeilenumformungen ergeben

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\mathrm{rg}A = 3$. Aus $\mathrm{rg}A \leq \mathrm{rg}(A, b) \leq 3$ folgt $\mathrm{rg}(A, b) = 3$. Damit ist das LGS eindeutig lösbar. Um die Lösung zu bestimmen, wenden wir erneut elementare Zeilenumformungen an, diesmal auf die erweiterte Koeffizientenmatrix.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right).$$

Ruckwärtseinsetzen ergibt

$$\begin{aligned} -\frac{5}{2}x_3 = -\frac{5}{2} &\Rightarrow x_3 = 1, \\ 2x_2 - 5 = -3 &\Rightarrow x_2 = 1, \\ x_1 + 2 = 1 &\Rightarrow x_1 = -1. \end{aligned}$$

Somit ist

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe G3

Berechnen Sie die Inverse von

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Mit elementaren Zeilenumformungen (Gauss-Jordan-Elimination) angewandt auf (A, E) erhält man (E, A^{-1}).

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Also ist

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (10 Punkte)

Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & (\lambda-1)x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

(a) keine,

(b) genau eine,

(c) mehrere Lösungen?

Bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen!

Lösung: Die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS lautet

$$(A_\lambda, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda-1 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda-1 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda+2 & 2 \\ 0 & \lambda+3 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda+2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda^2+5\lambda & 2\lambda \end{array}\right).$$

Also sind die Fälle $\lambda^2 + 5\lambda = 0$ und $\lambda^2 + 5\lambda \neq 0$ zu betrachten.

$\underline{\lambda = 0:}$ In diesem Fall ist

$$(\widetilde{A}_\lambda, \widetilde{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

also ist $\text{rg}A_\lambda = 2 = \text{rg}(A_\lambda, b)$ und das LGS ist lösbar.
Durch Rückwärtseinsetzen erhält man die Lösungen

$$L_0 = \left\{ \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\underline{\lambda = -5:}$ In diesem Fall ist

$$(\widetilde{A}_\lambda, \widetilde{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right),$$

also ist $\text{rg}A_\lambda = 2 \neq \text{rg}(A_\lambda, b) = 3$ und das LGS ist nicht lösbar.

$\underline{\lambda \neq -5, 0:}$ Hier gilt $\mathrm{rg} A_\lambda = 3 = \mathrm{rg}(A_\lambda, b)$. Somit ist das LGS eindeutig lösbar. Die eindeutige Lösung ist

$$x_\lambda = \frac{1}{\lambda + 5} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2 (9 Punkte)

Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = c$, und $Ax = d$ mit $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{11}{10} \end{pmatrix}$ und vergleichen Sie die Lösungsvektoren.

Anmerkung: Dieses LGS ist ein Beispiel dafür, wie eine "kleine" Abweichung in den Daten, die z.B. durch einen Messfehler entsteht, sich zu einer "großen" Abweichung in der Lösung verstärkt.

Lösung: Wie bei Übung G3 berechnet man die Inverse von A. Sie lautet

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}.$$

Außerdem erhält man

$$x = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 96 \\ -90 \end{pmatrix}$$

und

$$y = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{11}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 78 \\ -72 \end{pmatrix}.$$

Damit ist x die Lösung zum Gleichungssystem mit rechter Seite c und y die Lösung zum Gleichungssystem mit rechter Seite d.

Aufgabe H3 (10 Punkte)

Untersuchen Sie jeweils für die folgenden Mengen, ob sie Unterräume des angegebenen Vektorraums sind. Beweisen oder widerlegen Sie das jeweils.

(a) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 0 \right\}$ in $\mathbb{R}^3$,

(b) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 1 \right\}$ in $\mathbb{R}^3$,

(c) $U_3 := \{p \in P : p(1) = 0\}$ in P, dem Vektorraum der Polynome (vgl. 1. Übung),

(d) Für $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Menge $M_b := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \mathbf{x} = b\}$ in $\mathbb{R}^n$.

Lösung:

(a) U_1 ist ein Untervektorraum, denn aus $x, y \in U_1$ und

$$\alpha x + \beta y = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{pmatrix}$$

folgt $\alpha x_1 + \beta y_1 = 0$ und $\alpha x_2 + \beta y_2 = 0$, d.h. $\alpha x + \beta y \in U_1$.

(b) U_2 ist kein Untervektorraum, da $0 \notin U_2$.

(c) U_3 ist ein Untervektorraum, denn für $p_1, p_2 \in U_3$ gilt auch $\alpha p_1(1) + \beta p_2(1) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, also $\alpha p_1 + \beta p_2 \in U_3$.

(d) Falls $b = 0$ so ist $M_b = \mathbf{Kern}(A)$ und M_b ist damit ein Untervektorraum, denn mit $x_1, x_2 \in \mathbf{Kern}(A)$ folgt $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = 0$, d.h. $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathbf{Kern}(A)$.

Falls $b \neq 0$, so ist M_b kein Untervektorraum, denn $0 \notin M_b$, da $A0 = 0 \neq b$.