Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2006
04.05.2006

2. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie nacheinander die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_1$$

und

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot A_2.$$

Beschreiben Sie die Wirkung der Matrixmultiplikation auf die Matrizen A_i.

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix B, so dass $B \cdot A_3$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Welchen Rang hat die Matrix A.

Lösung: Es gilt

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mit der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ erhält man über $B \cdot A_3$ die obere Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Da A_3 den Rang 3 hat, gilt dies auch für die Matrix A.

Aufgabe G2

Betrachten Sie für die folgenden vier Matrizen jeweils die Mengen der Spaltenvektoren. Stellen Sie fest, welche dieser Mengen linear (un-)abhängig sind. Untersuchen Sie weiterhin, ob die lineare Hülle der jeweiligen Menge gleich $\mathbb{R}^3$ ist und ob diese Menge eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie weiterhin alle Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ mit $Dv = 0$.

Lösung:

A : linear abhängig ($s_3 = 2 \cdot s_1 + (-1) \cdot s_2$), da diese Menge drei Elemente enthält, kann $\mathbf{Lin}(s_1, s_2, s_3) = \mathbb{R}^3$ nicht gelten, insbesondere ist die Menge keine Basis.

B: linear abhängig (4 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind immer linear abhängig!), $\mathbf{Lin}(s_1, s_2, s_3, s_4) = \mathbb{R}^3$, da s_1, s_2, s_3 linear unabhängig sind, (Überprüfung durch LGS!), keine Basis.

C: linear abhängig ($s_3 = 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_3$), wie bei A folgt $\mathbf{Lin}(s_1, s_2, s_3) \neq \mathbb{R}^3$, keine Basis.

D: linear unabhängig, $\mathbf{Lin}(s_1, s_2, s_3) = \mathbb{R}^3$, Basis.

Aus Teil D folgt, dass nur $v = 0$ der Gleichung $Dv = 0$ genügt.

Hausübung

Aufgabe H1

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix B, so dass $B \cdot A$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Prüfen Sie dies anhand einer Proberechnung nach! Lösen Sie anschließend das lineare Gleichungssystem

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir multiplizieren die Matrix A nacheinander mit Elementarmatrizen und erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A_4.$$

Da A_4 eine obere Dreiecksmatrix ist, folgt

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um das LGS zu lösen, multiplizieren wir die Gleichung von links mit der Matrix B. Wir erhalten somit

$$(B \cdot A)x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung lässt sich nun einfach ablesen. Es gilt

$$x_3 = 0, \qquad x_2 = -1 + 4x_3 = -1, \qquad x_1 = 1 - 0x_2 - 3x_3 = 1.$$

somit ist $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Lösung der Gleichung.

Aufgabe H2

Überprüfen Sie, ob die Spaltenvektoren s_1, s_2, s_3, s_4 der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Geben Sie eine Basis des Unterraums $U = \mathbf{Lin}(s_1, s_2, s_3, s_4) \subseteq \mathbb{R}^4$ an.

Lösung: Die Spaltenvektoren sind linear abhängig:

$$(-23) \cdot s_1 + 1 \cdot s_2 + 2 \cdot s_3 = 0.$$

Weiterhin sind s_1, s_2, s_4 linear unabhängig und bilden eine Basis von U.