Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Geißert
Dr. H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006
27.04.2006

1. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrizen $A \cdot B$ und $B \cdot A$, sowie $A + B$ und $B + A$.

Lösung: Es gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$A + B = B + A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe G2

Gegeben sei die Matrix

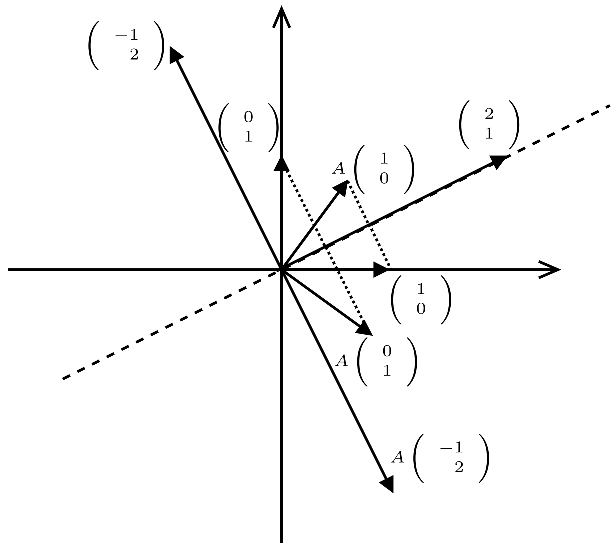
$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Abbildung $x \mapsto Ax$ mit $D(A) = \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie das Bild der Punkte $(1,0)^T$, $(0,1)^T$, $(2,1)^T$ und $(-1,2)^T$. Veranschaulichen Sie sich die Wirkung der Abbildung auf die gegebenen Punkte anhand einer Skizze. Wie würden Sie diese Abbildung geometrisch beschreiben?

Lösung: Es gilt

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}.$$



Die Abbildung beschreibt die Spiegelung an der Geraden durch den Ursprung mit Richtungsvektor $(2,1)^T$.

Aufgabe G3

Wir definieren die Menge der Polynome als

$$P := \{p : D(p) = \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i\}.$$

Desweiteren definieren wir die Addition und die Skalarmultiplikation für Elemente $p, q \in P$ durch

$$(p+q)(x) := p(x) + q(x) \qquad \text{und} \qquad (\lambda \cdot p)(x) := \lambda \cdot p(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass P ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ linear unabhängig ist. Welche Dimension hat der Vektorraum P?

Lösung: (a) Wir überprüfen die Vektorraumaxiome:

(i): Da $0+p(x) = p(x)+0 = p(x)$ gilt, ist das neutrale Element bzgl. der Addition das Polynom $o(x) = 0$. Das inverse Element zu $p \in P$ bzgl. der Addition ist $i(x) := -p(x)$, da $i(x) + p(x) = -p(x) + p(x) = 0 = o(x)$. Außerdem gilt $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$. Also ist die Addition von p und q kommutativ. Das Assoziativgesetz folgt ebenso, da $((p + q) + v)(x) = (p(x) + q(x)) + v(x) = p(x) + (q(x) + v(x)) = (p + (q + v))(x)$, für alle $p, q, v \in P$.

(ii): Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $p, q \in P$. Dann gilt

$$(\lambda(\mu p))(x) = (\lambda(\mu p)(x)) = ((\lambda\mu)p(x)) = ((\lambda\mu)p)(x)$$

und $(1p)(x) = 1p(x) = p(x)$. Außerdem gelten die Distributivgesetze

$$((\lambda + \mu)p)(x) = ((\lambda + \mu)p(x)) = \lambda p(x) + \mu p(x)$$

und

$$(\lambda(p + q))(x) = \lambda(p(x) + q(x)) = \lambda p(x) + \lambda q(x).$$

Damit sind die Vektorraumaxiome für P erfüllt.

(b) Wir zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $0 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \alpha_i = 0$ gilt. Aus dem ersten Semester wissen wir, dass jedes Polynom $p \neq 0$ vom Grad n höchstens n reelle Nullstellen hat. Gilt $0 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$, so ist jede reelle Zahl Nullstelle des Polynoms $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i$.

Hausübung

Aufgabe H1

(a) Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie, dass die zu A inverse Matrix gegeben ist durch

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

(c) Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{42}.

Hinweis: Die Matrix beschreibt die Drehung um den Ursprung mit Winkel $\frac{\pi}{2}$.

Lösung:

(a) $A \cdot A^{-1} = E$ nachrechnen!

(b) nach (a) gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

damit gilt

$$x = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) Da $42 \mod 4 = 2$ ist A^{42} die Drehung mit Winkel π und damit

$$A^{42} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2

Wir betrachten die Vektoren

$$p_1(x) = 1 + x, \quad p_2(x) = x + x^2, \quad p_3(x) = x^2 - 1 \quad p_4(x) = x \qquad \in P,$$

wobei P der Vektorraum der Polynome aus Aufgabe G3 ist.

(a) Entscheiden Sie, ob die Mengen $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ bzw. $\{p_1, p_2\}$ linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie die lineare Hülle von $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

Lösung: (a) Die Menge $\{p_1, p_2, p_3\}$ ist linear abhängig, da $x^2 - 1 = x + x^2 - (1 + x)$ folgt $p_3 = p_2 - p_1$, also auch $0 = p_2 - p_1 - p_3$. Damit ist diese Menge nicht linear unabhängig.

Die Menge $\{p_1, p_2\}$ ist linear unabhängig, da sonst $\alpha p_1 = p_2$ für ein $\alpha \neq 0$ gelten müsste. Setzt man $x = 0$ in die Gleichung $\alpha(1 + x) = x + x^2$ so folgt $\alpha = 0$ und damit ist $\{p_1, p_2\}$ linear unabhängig.

(b) Aus dem (a)-Teil wissen wir, dass $p_3 = p_2 - p_1$. Wir zeigen nun, dass $\{p_1, p_2, p_4\}$ linear unabhängig ist. Gilt $0 = \alpha_1(1 + x) + \alpha_2(x + x^2) + \alpha_3 x$, so folgt durch Einsetzen von $x = 0$, dass $\alpha_1 = 0$ sein muss. Das heißt es gilt $0 = (\alpha_2 + \alpha_3)x + \alpha_2 x^2$. Einsetzen von $x = -1$ liefert $\alpha_3 = 0$. Damit folgt aber (z.B. mit $x = 1$) auch, dass $0 = 2\alpha_2$ also $\alpha_2 = 0$ und dies liefert die lineare Unabhängigkeit von $\{p_1, p_2, p_4\}$. Damit gilt $\mathbf{Lin}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathbf{Lin}(p_1, p_2, p_4) = \{q = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_4 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$. Da $1 = p_1 - p_4$ und $x^2 = p_2 - p_4$ folgt, dass die lineare Hülle von $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ gerade aus den Polynomen mit Grad höchstens 2 besteht.