Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2009
17. Juli 2009

# 13. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und UI

## Gruppenübung

**Aufgabe G1**

Sei $r \in [-1, 1)$. Durch die Menge

$$K_r = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1,\, x_1 \leq r\right\}$$

wird eine Kugelkappe der Einheitskugel beschrieben. Veranschaulichen Sie diese Menge mit Hilfe einer Skizze und bestimmen Sie das Volumen von $K_r$.

**Aufgabe G2**

Berechnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes den Wert des Integrals

$$I_R = \int_{B_R} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) d(x, y)$$

in Abhängigkeit von $R$. Der Integrationsbereich ist dabei die Kreisscheibe vom Radius $R$ mit Mittelpunkt $(0, 0)$:

$$B_R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\right\}.$$

Berechnen Sie weiterhin den Grenzwert $\lim_{R\to\infty} I_R$.

*Hinweis*: Verwenden Sie die Transformation (Polarkoordinaten)

$$g : [0, \infty[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2, \quad g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

# Hausübung

## Keine Abgabe

### Aufgabe H1

Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der unterhalb der Fläche

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in [0,2]^2, z = xy^2 + y^3\right\}$$

und oberhalb des Quadrats

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in [0,2]^2, z = 0\right\}$$

liegt.

### Aufgabe H2

Es sei $B$ der Bereich im ersten Quadranten zwischen den Parabeln $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$. Skizzieren Sie $B$ und berechnen Sie

$$\int\limits_B \sqrt{x}y \; d(x,y).$$

### Aufgabe H3

Der Membranmantel eines Kühlturms $K$ lässt sich als Rotationskörper darstellen. Dabei wird das Hyperbelstück

$$x^2 - z^2 = 1, \quad -1 \leq z \leq 1$$

um die $z$-Achse gedreht. Stellen Sie die Menge $K$ in kartesischen Koordinaten dar und berechnen Sie dann das Volumen mit Hilfe einer geeigneten Transformation.

### Aufgabe H4

Sei $a, b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$

Begründen Sie zunächst, wieso $E$ ein Normalbereich ist.
*Hinweis:* Benutzen Sie die Transformation (verallgemeinerte Polarkoordinaten)

$$g : [0, \infty[ \times [0, 2\pi[ \to \mathbb{R}^2, \quad g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} ar\cos(\varphi) \\ br\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$