Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
Dr. M. Slassi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2009
01.7.2009

12. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Gegeben seien die Mengen $G_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1\big\}$ und $G_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le 1,\, -1 \le y \le 1\big\}$.

(a) Skizzieren Sie die Mengen G_1 und G_2.

(b) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{G_1} y(1-x)\, d(x,y), \qquad \int_{G_2} y(1-x)\, d(x,y).$$

Aufgabe G2

Haben die folgenden Functionen $f_i : G_i \to \mathbb{R}$ ein globales Maximum oder Minimum?

(a) $f_1 : G_1 = \{(x,y) \mid \; y \le x\} \to \mathbb{R}, f_1(x,y) = 10x^2 + 5xy - y^2$

(b) $f_2 : G_2 = \{(x,y) \mid \; x^2 + y^2 \le 1\} \to \mathbb{R}, f_2(x,y) = (\sin\sqrt{x^2+3+y})e^{x^2 \tan(y^2+1)}$

Aufgabe G3

Es sei durch $Q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x_1 \le 3,\ \ 1 \le x_2 \le 2,\ \ -1 \le x_3 \le 1\}$ und die Dichtefunktion $\rho : Q \to \mathbb{R}, \quad \rho(x_1, x_2, x_3) = x_2(x_1 - 2)^2 \exp(-x_3)$ ein inhomogener Quader gegeben. Berechnen Sie die Gesamtmasse

$$M := \int_Q \rho(x_1, x_2, x_3)\, d(x_1, x_2, x_3)$$

sowie den Schwerpunkt $S = (S_1, S_2, S_3)$, gegeben durch

$$S_i := \frac{1}{M} \int_Q x_i \rho(x_1, x_2, x_3)\, d(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, \dots, 3,$$

des Quaders. Zeigen Sie zunächst, dass die Integrale existieren.

Hinweis: $\frac{d}{dz}\left((z+1)\exp(-z)\right) = -z\exp(-z)$.

Hausübung

Freiwillige Abgabe

Aufgabe H1

(a) Sei $Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x \le 2,\ 3 \le y \le 5\right\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \cos(2\pi x)e^{3y}.$$

i. Skizzieren Sie Q und entscheiden Sie, ob $\int_Q f(x, y) d(x, y)$ existiert.

ii. Prüfen Sie, ob die iterierten Integrale

$$\int_1^2 [\int_3^5 f(x, y)\, dy]\, dx \quad \text{und} \quad \int_3^5 [\int_1^2 f(x, y)\, dx]\, dy$$

übereinstimmen.

(b) Sei $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \le x \le 4,\ -1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le \pi\right\}$. Berechnen Sie

$$\int_G (x^3 y \cos(z) - 3e^x y^2 + 2xy \sin(z))\, d(x, y, z).$$

Aufgabe H2

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \exp(x + 2y)$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ sowie die Mengen $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\right\}$ und $N = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \le 0\right\}$. Bestimmen Sie die globalen Extrema von $f|_M$ und $f|_N$. Begründen sie dabei zuerst, weshalb globale Minima bzw. Maxima für beide Probleme existieren.