Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
19. Juni 2009

# 10. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und UI

## Gruppenübung

### Aufgabe G1

(a) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix von $f$ in allen Punkten, in denen sie existiert (siehe Uebungsblatt 9, G1).

(b) Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} xyz \\ -xyz \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$$

gegeben.
Bestimmen Sie alle der folgenden Ausdrücke, die Sinn machen: $(\text{grad } f)(x, y, z)$, $J_f(x, y, z)$, $H_f(x, y, z)$, $(\text{grad } g)(x, y)$, $J_g(x, y)$, $H_g(x, y)$.

### Aufgabe G2

Die Funktion $u : \,]0, \infty[ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$u(t, x, y) = (4\pi t)^{-1} \exp\left[-(x^2 + y^2)/4t\right].$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}$$

gilt, indem Sie die auftretenden partiellen Ableitungen berechnen.

Bemerkung: Eine Funktion $u : \,]0,\infty[\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die die obige Gleichung erfüllt, heißt Lösung der *Wärmeleitungsgleichung*. Mit dieser *partiellen Differentialgleichung* lässt sich die zeitliche Entwicklung einer zur Zeit $t = 0$ vorgegebenen Temperaturverteilung beschreiben.

**Aufgabe G3**

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\|v\| = 1$. Berechnen Sie die Richtungsableitung in $(0,0)$ mit dem Differenzenquotienten, d.h.

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f((0,0))}{t}.$$

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $\|v\| = 1$. Gilt $\partial_v f(0,0) = \langle \operatorname{grad} f(0,0), v\rangle$?

(c) Wieso darf die Formel aus dem Skript nicht angewendet werden?

*Hinweis:* Schreiben Sie $v$ in der Form $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

# Hausübung

**Aufgabe H1** (9 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $H\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den drei Komponentenfunktionen

$$\begin{aligned} H_1(x_1,x_2,x_3) &= \cosh(x_1^2 + x_2^2 - x_3), \\ H_2(x_1,x_2,x_3) &= \sqrt{\exp(x_1x_2)}, \\ H_3(x_1,x_2,x_3) &= x_3, \end{aligned}$$

also $H(x_1,x_2,x_3) = (H_1(x_1,x_2,x_3), H_2(x_1,x_2,x_3), H_3(x_1,x_2,x_3))$.

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung der Komponenten $H_1$, $H_2$, $H_3$.

(b) Geben Sie die Funktionalmatrix $J_H(x_1,x_2,x_3)$ an.

(c) Berechnen Sie $\det J_H(0,1,1)$.

**Aufgabe H2** (9 Punkte)

Es seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = -x^2 + 2xy - y^3, \quad g(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}, \quad h(x) = f\left(g(x)\right).$$

(a) Geben Sie die partiellen Ableitungen $f_x$, $f_y$, $f_{xx}$, $f_{xy}$, $f_{yx}$, $f_{yy}$ an.
Stimmen $f_{xy}$ und $f_{yx}$ überein?

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von $h$ mit der Kettenregel.

(c) Bestimmen Sie $h'(x)$ direkt.