Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
15. Juni 2009

9. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und UI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ partiell differenzierbar ist (Differenzenquotient!). Was ist der Gradient von f in $(0, 0)$?

(b) In welchen Punkten ist f stetig partiell differenzierbar?

(c) Was können Sie über den Zusammenhang zwischen partieller Differenzierbarkeit und Stetigkeit aussagen?

Aufgabe G2

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 - y$.

(a) Bestimmen und skizzieren Sie die Schnitte des Funktionsgraphen für $x = -1, 0, 1$, bzw. $y = -1, 0, 1$, d.h. die Graphen der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $y \mapsto f(-1, y)$, $y \mapsto f(0, y)$ und $y \mapsto f(1, y)$ bzw. $x \mapsto f(x, -1)$, $x \mapsto f(x, 0)$ und $x \mapsto f(x, 1)$.

(b) Bestimmen und skizzieren Sie die Niveaumengen von f zu den Niveaus -2, -1, 0, 1 und 2.

(c) Skizzieren Sie ein 3-dimensionales Bild des Graphen.

Aufgabe G3

Untersuchen Sie, ob diese Mengen M_i, $i = 1, 2$, offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt sind (mit Begründung).

(a) $M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |xy| < 1, \ |x-1| < 2\}$.

(b) $M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+y = 1, \ (x-1)^2 + y^2 < 4\}$.

(c) Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die Menge $M_3 := f^{-1}\{0\}$ abgeschlossen ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

a) $f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{xy} & \text{für} \quad x, y \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ *Hinweis:* Ist f_1 auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ stetig? (Beweis?).

Wie verhält sich die Funktion auf ganz $\mathbb{R}^2$ auf der Diagonalen?

b) $f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)2}{x2+y2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe H2 (6 Punkte)

Die Menge $M_2(\mathbb{R})$ der (2×2) Matrizen $(m_{i,j})_{2,2}$ über $\mathbb{R}$ ist ein 4-dimensionaler reeller Vektorraum. Man kann daher die euklidische Norm $\| \cdot \|_2$ auf $M_2(\mathbb{R})$ benutzen.

a) Sind die Projektionen $p_{i,j} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, M \mapsto m_{i,j}$ stetig?

b) Beweisen Sie, daß die Determinante $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung ist.

c) Schließen Sie, daß $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0\}$ eine abgeschlossene Menge ist.