



8. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und UI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Bestimmen Sie die passenden Graphen bzw. Höhenlinien zu folgenden Funktionen.

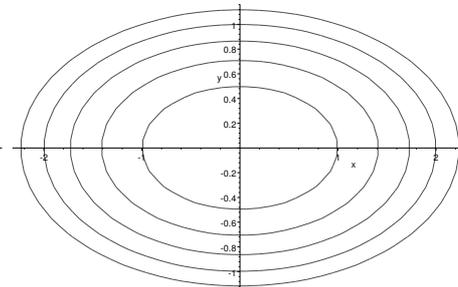
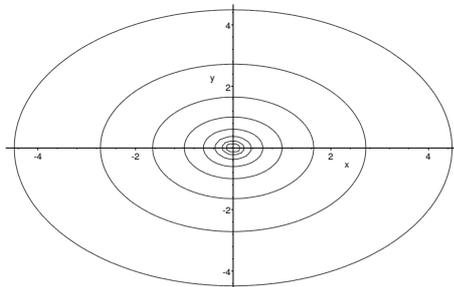
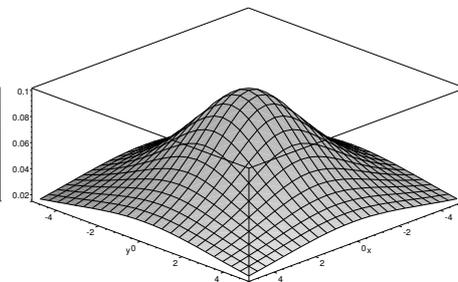
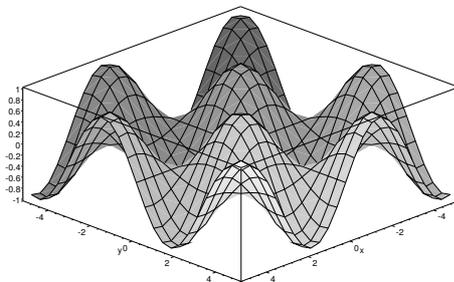
$$f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x, y) = x^2 + 4y^2$$

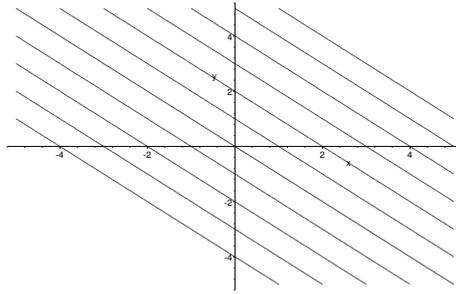
$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 10}$$

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x, y) = x + y - 1$$

$$f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$f_5 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f_5(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$





Aufgabe G2

Wir betrachten die folgenden Folgen in \mathbb{R}^2 :

$$a_n := \left(n \frac{1}{n}\right)^T \quad b_n := \left(\frac{1}{n^2} \frac{n}{1+n}\right)^T \quad c_n := \left(\frac{1}{n^2} \frac{1}{n^2}\right)^T \quad d_n := \left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)^T, \quad n \geq 1.$$

- Skizzieren Sie diese Folgen. Welche dieser Folgen sind beschränkt?
- Welche sind konvergent, welche nicht? Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?
- Geben Sie zwei weitere Nullfolgen in \mathbb{R}^2 an.

Aufgabe G3

Es seien die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\} \quad \text{und} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\} \end{aligned}$$

gegeben.

- Skizzieren Sie die Mengen.
- Welche dieser Mengen sind abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt? Begründen Sie dabei Ihre Aussagen!
- Für eine beliebige Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wird die Menge

$$\overline{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \text{Es existiert eine Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x. \right\}$$

als *Abschluss* von M bezeichnet. Bestimmen Sie den Abschluss von A , B und C . Was wäre hier genau zu zeigen?

Hausübung

Aufgabe H1 (17 Punkte)

Es seien

$$A := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } D := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Welche dieser Matrizen sind symmetrisch, positiv definit, negativ definit, bzw. orthogonal?
- Was weiß man damit jeweils über die Diagonalisierbarkeit und die Eigenwerte der jeweiligen Matrix?

Hinweis: Eine Matrix A ist genau dann positiv definit wenn $-A$ negativ definit ist (vgl. Definition).

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie verschiedene Nullfolgen $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im \mathbb{R}^2 und untersuchen Sie die Folgen $(f(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

Aufgabe H3 (8 Punkte)

Wir betrachten den reellen Vektorraum Raum V aller Polynome vom Grad höchstens 2 auf dem Einheitsintervall.

- Zeigen sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

ein Skalarprodukt auf V definiert ist.

- Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis bezüglich dieses Skalarproduktes.

Hinweis: Sie können mit der Basis $1, x, x^2$ beginnen

- Bestimmen Sie die Orthogonale Projektion von $f(x) = \sin(x)$ auf V .

Es spielt die Band
Celebration



Karte: 16€
Studenten: 14€
Ab 10 Karten: Vergünstigung
um 2€ pro Karte
VVK: Mathebau S2 | 15 347
Di. - Fr.: 12.30 - 13.30 Uhr.
Mo.: 18.00 - 19.00 Uhr

BALL DER MATHEMATIKER

Sa. 13.06.09

Otto-Berndt-Halle

(Mensa Stadtmitte, Alexanderstr. 4)

Einlass: 19:30 Uhr

Beginn: 20:00 Uhr

<http://www.mathebau.de/matheball>