Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
Dr. M. Slassi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
27.5.2009

7. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und UI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden linearen Abbildungen. (Machen Sie sich zuvor die geometrische Bedeutung von Eigenwerten klar.)

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f_1 beschreibt die Spiegelung an der Geraden $G = \mathbf{Lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

(b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, f_2 beschreibt die Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn mit Drehachse $\mathbf{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

(c) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, f_3 beschreibt die orthogonale Projektion auf die x_1-Achse.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A diagonalähnlich? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so daß $T^{-1}AT = D$ gilt.

Hausübung

Aufgabe H1

Bestimmen Sie reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ so, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2a & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

symmetrisch ist und die Eigenwerte 0, -2 und 2 besitzt. Wie lauten zugehörige Eigenvektoren?

Aufgabe H2

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Ist A diagonalähnlich? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Matrix T an, so daß $T^{-1}AT = D$ gilt.

Aufgabe H3

Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{b}_1 = (1\ 1\ 1\ 1)^T$, $\mathbf{b}_2 = (1\ 0\ 1\ 0)^T$ und $\mathbf{b}_3 = (2\ 1\ 1\ 2)^T$. Es sei U der von den Vektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_2$ aufgespannte Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$. Berechnen Sie die orthogonale Projektion des Punktes $\mathbf{b}_4 = (1, 1, 0, 0)^T$ auf den Untervektorraum U.