Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Slassi
M. Fuchssteiner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2009
22. Mai 2009

6. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und UI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinanten $\det(A)$ und $\det(B)$

- mittels der Entwicklung nach Zeilen bzw. Spalten,
- mittels elementarer Umformungen zu einer oberen Dreiecksmatrix.

Aufgabe G2

(a) Im $\mathbb{R}^2$ seien die Vektoren $a = (2 \;\; 1)^T$ und $b = (-2 \;\; 2)^T$ gegeben. Zeichnen Sie diese in eine Skizze und machen Sie sich daran den Begriff der „Dreiecksungleichung“ klar.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von Norm und Skalarprodukt den Satz des Pythagoras.

(c) Im $\mathbb{R}^2$ seien durch $-x_1 + 2x_2 = 3$ bzw. $x_1 + 3x_2 = 5$ zwei Geraden G_1 und G_2 gegeben. Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden. Geben Sie weiter eine Gerade G_3 an, die G_1 im Winkel $\pi/2$ schneidet.

Aufgabe G3

Es seien

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene $E_1 = \{\lambda v_1 + \mu v_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$;

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene $E_2 = \{v_0+\lambda v_1+\mu v_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$;

(c) Bestimmen Sie die Parameterform der Ebene $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 5\}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (7 Punkte)

Geben Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den folgenden drei Eigenschaften an:

i) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ii) für $G = \left\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ gilt $f(G) = G$,

iii) f ist injektiv.

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix bzgl. der natürlichen Basis.

Aufgabe H2 (9 Punkte)

(a) Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|\det(A)| = 1$ an, die nicht orthogonal ist.

(c) Gegeben sei die Ebene E, die die Punkte $(1, 0, 0)^T$, $(2, 1, 1)^T$ und $(1, 1, 0)^T$ enthält. Geben Sie die Hesse-Normalform von E an.

(d) Es sei $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(b_1) = b_1$, $\varphi(b_2) = b_2$ und $\varphi(b_3) = 0$. Weiter sei A die Abbildungsmatrix von φ bzgl. B. Bestimmen Sie Rang A und $\ker(A)$.

Aufgabe H3 (6 Punkte)

Wir Betrachten die Menge der Polynome

$$P := \{p : D(p) = \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N}_0, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $V = \{x^0, x^1, \ldots, x^n\}$ ein Basis des Vektorraumes P ist.

(b) Durch $\varphi\,(p) = p'$ wird eine lineare Abbildung $\varphi : P \to P$ definiert. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ.