Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
Dr. M. Slassi

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009
07.05.2009

4. Übungsblatt zur Mathematik II

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ Diagonalmatrizen, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

mit reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$.

i. Berechnen Sie $A \cdot B$

ii. Für welche Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A invertierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Inverse an.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, so dass $E_n - A$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$(E_n - A)^{-1} = E_n + A(E_n - A)^{-1}$$

(c) Es sei $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix mit $2C = C^2 - E_n$. Zeigen Sie: C ist invertierbar.

Aufgabe G2

Bestimmen Sie jeweils eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$, so dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ die Lösungsmengen

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ bzw. } E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

hat.

Aufgabe G3

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 42 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H1

Wir betrachten die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von A und Rang(A).

(b) Lösen Sie (falls möglich) die LGSe $Ax = b$ und $Ax = c$, mit
$$b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie alle $b \in \mathbb{R}^3$ für die das LGS $Ax = b$ eine Lösung besitzt. (Dazu muss man jetzt nicht mehr rechnen!)

Aufgabe H2

Es seien die drei Punkte $x_0 := (1, 0, 1)^T$, $x_1 = (0, 1, 1)^T$ und $x_2 = (1, 1, 0)^T$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Verifizieren Sie, dass die Vektoren $x_1 - x_0$ und $x_2 - x_0$ linear unabhängig sind.

(b) Betrachten Sie die durch x_0, x_1 und x_2 aufgespannte Ebene
$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0);\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$
Geben Sie ein LGS an, dessen Lösungsmenge E ist.

Aufgabe H3

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt immer:

Wahr	Falsch	
☐	☐	$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
☐	☐	$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
☐	☐	$\text{Rang}(A \cdot B) = \text{Rang}(A) \cdot \text{Rang}(B)$
☐	☐	$\text{Rang}(A + B) = \text{Rang}(A) + \text{Rang}(B)$

Folgende Abbildungen $\varphi : V \to V$ bzw. $\varphi : V \to \mathbb{R}$ sind linear:

Wahr	Falsch	
☐	☐	Der Vektorraum V ist der Vektorraum der reellen Polynome und $\varphi(p) = p'$.
☐	☐	Der Vektorraum $V = C([0, 1])$ ist der Vektorraum aller reellen stetigen funktionen auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$, $x \in [0, 1]$ fix und $[0, 1]$ und $\varphi(f) = f(x)$.
☐	☐	$V = \mathbb{R}$, $\varphi(v) = \sin(v)$.
☐	☐	$V = \mathbb{R}$, $\varphi(v) = 1$.