Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
M. Fuchssteiner
Dr. M. Slassi

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2009
30.04.2009

3. Übungsblatt zur Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo und VI

Gruppenübung

Aufgabe G1

Betrachten Sie die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob diese Matrizen in Zeilenstufenform gegeben sind. Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = 3$ lösbar? Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS $Cx = d$ mit $d = (1,1,1)^T$.

Aufgabe G2

Überprüfen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

lösbar sind. Bestimmen Sie jeweils den Rang der Koeffizientenmatrix sowie die Dimension des Lösungsraums. Geben Sie den Lösungsraum an.

Aufgabe G3

Berechnen Sie die Inverse von

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H1

Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & (\lambda - 1)x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

(a) keine,

(b) genau eine,

(c) mehrere Lösungen?

Bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen!

Aufgabe H2

Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax = c$, und $Ax = d$ mit $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{11}{10} \end{pmatrix}$ und vergleichen Sie die Lösungsvektoren.

Anmerkung: Dieses LGS ist ein Beispiel dafür, wie eine "kleine" Abweichung in den Daten, die z.B. durch einen Messfehler entsteht, sich zu einer "großen" Abweichung in der Lösung verstärkt.

Aufgabe H3

Untersuchen Sie jeweils für die folgenden Mengen, ob sie Unterräume des angegebenen Vektorraums sind. Beweisen oder widerlegen Sie das jeweils.

(a) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 0 \right\}$ in $\mathbb{R}^3$,

(b) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 1 \right\}$ in $\mathbb{R}^3$,

(c) $U_3 := \{p \in P : p(1) = 0\}$ in P, dem Vektorraum der Polynome (vgl. 1. Übung),

(d) Für $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Menge $M_b := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \mathbf{x} = b\}$ in $\mathbb{R}^n$.