Übung zur Vorlesung Einführung in die Algebra

Prof. Dr. J. H. Bruinier
Stephan Ehlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2009
Übungsblatt 7

Aufgabe G7.1 Perlenketten und Gruppenoperationen

Wir wollen herausfinden, wie viele verschiedene Perlenketten mit n Perlen es gibt, wobei wir uns aus einem Vorrat von m Sorten von Perlen bedienen.

(a) Wie viele verschiedene Perlenketten der Länge 3, die ausschließlich aus schwarzen und weißen Perlen bestehen, gibt es?

(b) Modellieren Sie das Problem mit Hilfe von Gruppenwirkungen:

1. Eine ausgerichtete Perlenkette P der Länge n sei gegeben durch eine Verteilungsfunktion

$$F : E(R_n) \to \{1, \dots, m\},$$

die jeder Ecke eines regulären n-Ecks R_n eine der m Perlensorten zuordnet.

2. Sei $g \in G(R_n) = D_n$ eine Symmetrie von R_n. Wie lautet die neue Verteilungsfunktion, für die ausgerichtete Perlenkette, die durch Anwendung von g auf die Ecken von R_n entsteht?
3. Wie definiert Ihnen dies nun eine Operation von $G(R_n)$ auf der Menge der Verteilungsfunktionen?
4. Wie errechnet sich dadurch die Menge der verschiedenen Perlenketten (nicht ausgerichtet)?

(c) Benutzen Sie den Satz von Burnside, um eine Formel für die Anzahl der verschiedenen Perlenketten anzugeben.

(d) Wie viele Perlenketten der Länge 7 gibt es, die aus 2 verschiedenen Perlensorten bestehen? Hinweis: Die Symmetriegruppe von R_n besteht aus Drehungen und Spiegelungen, wie wir bereits wissen. Überlegen Sie sich, dass im vorliegenden Fall die Anzahl der Fixpunkte für alle Drehungen und für alle Spiegelungen jeweils gleich sind.

Aufgabe G7.2 Konjugationsklassen in der symmetrischen Gruppe S_n

Zu Vorbereitung auf diese Aufgabe, wiederholen Sie die Zykelschreibweise für Permutationen. Es sei $n \geq 3$ und $\pi \in S_n$, dann lässt sich π in Zykelschreibweise zerlegen:

$$\pi = (k_{1,1}\ k_{1,2}\ \dots\ k_{1,m_1}) \cdots (k_{n,1}\ k_{n,2}\ \dots\ k_{n,m_n}),$$

wobei alle $k_{i,j} \in \{1, \dots, n\}$ und paarweise verschieden sind. Hierbei ist ein einzelner Zykel $(k_1\ k_2\ \dots\ k_m) \in S_n$ die Abbildung, die k_1 auf k_2, k_2 auf k_3, ..., k_{m-1} auf k_m und k_m auf k_1 abbildet. Beispielsweise ist die Transposition der Elemente 1 und 2 durch den Zykel $(1\ 2)$ gegeben und die Permutation der Menge $\{1, \dots, 5\}$ die 1 und 2 sowie 4 und 5 vertauscht, aber 3 festlässt durch $(1\ 2)(4\ 5)$.

(a) Schreiben Sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

in Zykelschreibweise.

(b) Zeigen Sie, dass $\pi \circ (1\ 2\ 3) \circ \pi^{-1} = (\pi(1)\ \pi(2)\ \pi(3))$ für alle $\pi \in S_n$.

(c) Es seien $\sigma, \pi \in S_n$ und in der Zykelzerlegung von π komme der Zykel $(k_1\ k_2\ \dots\ k_m)$ vor, wobei m und $k_1, \dots, k_m \in \{1, \dots, m\}$ sind. Zeigen Sie, dass in der Zykelzerlegung von $\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$ der Zykel $(\pi(k_1)\ \pi(k_2)\ \dots\ \pi(k_m))$ vorkommt.

(d) Wir sagen, dass zwei Permutationen σ und π den gleichen *Zykeltyp* haben, falls in den Zykelzerlegungen von π und σ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ gleich viele Zykel der Länge k vorkommen. Zeigen Sie, dass σ und $\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$ den gleichen Zykeltyp haben.

(e) Zeigen Sie, dass zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ genau dann den gleichen Zykeltyp haben, wenn Sie konjugiert sind (d.h. es existiert ein $\pi \in S_n$, so dass $\sigma = \pi \circ \tau \circ \pi^{-1}$).

(f) Bestimmen Sie alle Konjugationsklassen von S_3 und S_4.

Aufgabe G7.3 Einige Anwendungen des Satzes von Sylow

(a) Es sei G eine Gruppe der Ordnung 15. Zeigen Sie, dass es in G genau 2 Elemente der Ordnung 3 und 4 Elemente der Ordnung 5 gibt. Welche Ordnung haben die übrigen Elemente? Bestimmen Sie mit diesen Informationen bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 15.

(b) Ab diesem Aufgabenteil sei nun G eine Gruppe der Ordnung pq, mit $p < q$ Primzahlen. Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler Q der Ordnung q besitzt.

(c) Es sei weiterhin P eine p-Sylow-Untergruppe von G. Zeigen Sie dann, dass $G \cong Q \rtimes_\alpha P$, wobei

$$\alpha : P \to \mathrm{Aut}(Q), \alpha(g)(h) = ghg^{-1}.$$

Hierbei ist $Q \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ und $P \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sowie $\mathrm{Aut}(Q) \cong \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$.

Aufgabe H7.1 Gruppen der Ordnung pq

Es sei G eine Gruppe der Ordnung pq mit $p < q$ prim. Zeigen Sie, falls p kein Teiler von $q-1$ ist, so ist

$$G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

Finden Sie auch einen Beweis, der sich von der Argumentation in Aufgabe G7.3 (a) unterscheidet.

Aufgabe H7.2 Alle Gruppen der Ordnung ...

(a) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 10.

(b) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 35, 65 und 77.

Aufgabe H7.3 Die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers

Es sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen. Zeigen Sie, dass die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}^\times$ von $\mathbb{F}$ zyklisch ist.

Aufgabe H7.4 Klassifikation*

Für welche $n = 1, 2, \dots$ kennen Sie nun bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung n?

- Erstellen Sie eine Tabelle für die ersten n. Wo gibt es noch Lücken in Ihrer Liste für $n \leq 15$?
- Können Sie die Lücken füllen?

Hinweis: Die Hausaufgaben sind die mit dem Buchstaben “H” gekenzeichneten Aufgaben. Die bearbeiteten Aufgaben werden am 14.7. **zu Beginn der Vorlesung** abgegeben! *Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.*