Übung zur Vorlesung Einführung in die Algebra

Prof. Dr. J. H. Bruinier
Stephan Ehlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2009
Lösungshinweise zu Übungsblatt 6

Für die Gruppenübungen verweisen wir auf die Übung. Bitte beachten Sie auch, dass es sich wirklich größtenteils nur um Lösungshinweise handeln soll. Häufig müssen Sie noch einige Details ausarbeiten. Wichtig ist, dass Sie sich selber mit den Problemen auseinandersetzen!

Aufgabe H6.1 Normalisator und Zentralisator

Sei G eine Gruppe und $M \subset G$ eine Teilmenge. Man bezeichnet mit

$$Z_M := \{x \in G : xm = mx \text{ für alle } m \in M\}$$

den *Zentralisator* von M in G und mit

$$N_M := \{x \in G : xM = Mx\}$$

den *Normalisator* von M in G. Zeigen Sie:

(a) Es ist $Z_M = \bigcap_{x \in M} G_x$ der Schnitt der Stabilisatoren von Elementen $x \in M$ unter der Konjugationsoperation. Der Stabilisator G_x ist eine Untergruppe und der Schnitt von Untergruppen ist ebenfalls eine Untergruppe. Also ist Z_M eine Untergruppe von G.
Dass der Normalisator N_M eine Untergruppe von G ist, sieht man auch leicht: Natürlich ist $1 \in N_M$.
Für $x, y \in N_M$ ist $(xy)M = x(yM) = x(My) = (xM)y = (Mx)y = M(xy)$, also ist auch $xy \in N_M$.
Außerdem, falls $xM = Mx$, so multiplizieren wir von links und rechts mit x^{-1} und erhalten $Mx^{-1} = x^{-1}M$, also ist mit $x \in N_M$ auch $x^{-1} \in N_M$.

(b) Sei $H \subset G$ eine Untergruppe von G und $I \subset G$ eine Untergruppe von G, so dass $H \lhd I$ Normalteiler in I ist. Es gilt also $gH = Hg$ für alle $g \in I$. Damit ist $g \in N_M$ per Definition und somit $I \subset N_M$.

(c) Klarerweise gilt $Z_H \subseteq N_H$ per Definition. Aus Aufgabe H2.3 (c) wissen wir, dass die Abbildung

$$\psi : N_H \to \mathrm{Aut}(H), g \mapsto \phi_g,$$

die einem Gruppenelement den zugehörigen inneren Automorphismus zuordnet ein Homomorphismus ist. Natürlich wissen wir das auch deshalb, da die Konjugation ja eine Gruppenoperation ist. Allerdings ging die Abbildung eigentlich von G nach $\mathrm{Aut}(G)$. Wir schränken diese Abbildung dann aber auf N_H ein und da für alle $g \in N_H$ gilt $gHG^{-1} = H$, so ist $\phi_g : x \mapsto gxg^{-1}$ ein innerer Automorphismus von H. Der Kern $\ker(\psi)$ ist gleich Z_H. Damit ist $Z_H \lhd N_H$ ein Normalteiler in N_H. Außerdem ist nach dem ersten Homomorphiesatz dann $N_H/Z_H \cong Bild(\psi) \subseteq \mathrm{Aut}(H)$.

Aufgabe H6.2 Extremalpunkte des Würfels und des Einheitskreises

(a) *Extremalpunkte des Würfels*: Wir behaupten, dass $E(W) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| = |x_2| = |x_3| = 1\} = \{1, -1\}^3$. Es sei $x = (x_1, x_2, x_3) \in W$. Ist $x \notin \{1, -1\}^3$, so existiert ein $j \in \{1, 2, 3\}$ mit $|x_j| < 1$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$y_j := x_j + \varepsilon \in [-1, 1] \qquad \text{und} \qquad z_j := x_j - \varepsilon \in [-1, 1].$$

Wir setzen $y_k := z_k := x_k$ für $k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{j\}$ und $y := (y_1, y_2, y_3)$, $z := (z_1, z_2, z_3)$. Dann gilt $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \in]y, z[$, wobei $y \neq x$ und $z \neq x$. Also ist x nicht extremal.

Es sei nun umgekehrt $x \in \{-1,1\}^3$. Ist $x \in]y,z[$ für gewisse $y,z \in W$, so existiert $t \in]0,1[$ mit $x = ty + (1-t)z$. Gegeben $j \in \{1,2,3\}$ gilt entweder $x_j = -1$ oder $x_j = 1$. Ist $x_j = 1$, so muss auch $y_j = z_j = 1$ sein, denn sonst wäre $x_j = ty_j + (1-t)z_j < t + (1-t) = 1$, Widerspruch. Analog muss $y_j = z_j = -1 = x_j$ gelten, wenn $x_j = -1$. Also $y = z = x$. Somit ist $x \in E(W)$.

Extremalpunkte der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$: Wir zeigen, dass $E(\mathbb{D}) = \mathrm{S}^1$ der Einheitskreis ist. Ist nämlich $x \in \mathbb{D}^0$ im Inneren von $\mathbb{D}$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $y := x - \varepsilon e_1 \in \mathbb{D}$ und $z := x + \varepsilon e_1 \in \mathbb{D}$. Wegen $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \in]y,z[$ mit $y \neq x$ ist dann $x \notin E(\mathbb{D})$.

Sei nun umgekehrt $x \in \mathrm{S}^1$ und $x \in]y,z[$ für gewisse $y,z \in \mathbb{D}$, etwa $x = ty + (1-t)z$ mit $t \in]0,1[$. Dann ist

$$H := \{u \in \mathbb{R}^2 \colon \lambda(u) := \langle u, x\rangle \geq 1\}$$

eine abgeschlossene Halbebene mit $H \cap \mathbb{D} = \{x\}$. Angenommen nun, es wäre $y \neq x$ oder $z \neq x$. Dann wäre also $\lambda(y) < 1$ oder $\lambda(z) < 1$. Da $\lambda \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\lambda(u) := \langle u, x\rangle$ linear ist, folgt

$$1 = \lambda(x) = \lambda(ty + (1-t)z) = t\lambda(y) + (1-t)\lambda(z) < t + (1-t) = 1,$$

Widerspruch. Somit gilt doch $y = z = x$. Also $x \in E(\mathbb{D})$.

(b) Geometrisch sieht man dies am leichtesten: Wir fixieren irgendeinen Extremalpunkt, z.B. den Punkt $(1,1,1)$. Die Drehungungen um 90, 180 und 270 Grad um die Achse, die durch die Mittelpunkte der oberen und der unteren Wand gehen, führen den Punkt $(1,1,1)$ in sämtliche Punkte $(x,y,1)$ mit $x,y \in \{1,-1\}$ über. Die Drehung um 270 Grad um die Achse durch die vordere und die hintere Wand des Würfels, bildet $(1,1,1)$ auf $(1,1,-1)$ ab, wovon aus wieder alle Punkte mit z-Koordinate -1 erreicht werden können.

Aufgabe H6.3 Schwerpunkte

Die Aufgabenteile (a) und (b) folgen direkt aus der Definition des Schwerpunktes und von $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ bzw. des Mittelpunktes.

In den Aufgabenteil (c) hatte sich die kleine Schwierigkeit eingeschlichen, dass für den Fall, dass $E(M)$ unendlich viele Elemente enthält, der Schwerpunkt gar nicht definiert worden ist. Nimmt man jedenfalls an, (so, wie es auch in der Vorlesung getan wurde und wie Sie es in Teil (a) für eine endliche Extremalpunktemenge gezeigt haben,) dass der Schwerpunkt von der Symmetriegruppe festgehalten wird, so argumentiert man folgendermaßen: Falls $b_{E(M)} = 0 \in \mathbb{R}^n$, so gilt also für $g \in G(M)$, dass $g(0) = 0$ ist. Ein Element $g \in G(M)$ hat immer die Gestalt $g(x) = Ax + b$ für $A \in O_n(R)$ und $b \in R^n$. Da $g(0) = 0$ ist, muss aber $b = 0$ sein.

Aufgabe H6.4 Die Diedergruppe D_n

(a) Die Extremalpunkte sind gerade die Ecken e_k, $k = 0, \ldots, n-1$ und der Schwerpunkt ist die 0. Hieraus folgt, dass die Symmetriegruppe des regulären n-Ecks aus orthogonalen Transformationen besteht, d.h. es sind Matrizen $A \in R^{2\times 2}$ mit Determinante ± 1. Diese Matrizen sind alle von der Form

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi]$.

(b) Der Stabilisator von $e_0 = (1,0)$ besteht aus der Identität und der Spiegelung an der x-Achse. Diese ist immer in $G(R)$ enthalten, da e_k unter dieser Spiegelung auf e_{n-k} abgebildet wird (genau genommen müsste man dies noch für die Verbindungsstrecken überprüfen). Die Bahn von e_0 ist jedoch natürlich ganz $E(R)$, da die Drehungen um Vielfache von $\frac{2\pi}{n}$ die Ecke e_0 in eine beliebige andere Ecke überführen. Damit sagt die Bahnengleichung, dass $|G(R)| = 2 \cdot |E(R)| = 2n$ Elemente hat.

(c) Wir wissen nun, dass $G(R)$ von den Drehungen um $\frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$ und der Spiegelung an der x-Achse erzeugt wird, denn die davon erzeugte Gruppe hat natürlich $2n$ Elemente, wie man leicht in Matrizenschreibweise sieht. Überlegen Sie sich, dass sich also jedes Element aus $G(R)$ schreiben lässt als

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

wobei ϕ von der Form $\phi = \frac{2\pi k}{n}$ ist.

Die Isomorphie ergibt sich, indem man ein Element A dieser Form auf das Paar $(e^{\phi}, \det A)$ abbildet. In jedem Falle ist diese Abbildung schon einmal surjektiv.

Man rechnet nach, dass die so definierte Abbildung $F : G(R) \to D_n$ ein Homomorphismus ist. Es gibt im Prinzip vier Fälle zu unterscheiden:

a) Zwei Drehungen A_1 und A_2 um die Winkel ϕ_1, ϕ_2 miteinander verknüpft ergeben wieder einer Drehung um den Winkel $\phi_1 + \phi_2$. Es ist $F(A_j) = (e^{\phi_j}, 1)$ und $F(A_1 A_2) = (e^{\phi_1+\phi_2}, 1) = (e^{\phi_1}, 1)(e^{\phi_2}, 1)$.

b) Drehung A mal Spiegelung B, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sind: $F(AB) = (e^{\phi+\psi}, -1) = (e^{\phi}, 1)(e^{\psi}, -1) = F(A)F(B)$.

c) Spiegelung B mal Drehung A: $F(BA) = (e^{\psi-\phi}, -1) = (e^{\psi}, -1)(e^{\phi}, 1) = F(B)F(A)$.

d) Spiegelung mal Spiegelung, wieder mit den Winkeln ϕ und ψ: $F(AB) = (e^{\phi-\psi}, 1) = (e^{\phi}, -1)(e^{\psi}, -1) = F(A)F(B)$.

Sie sollten die vier Fälle am besten noch einmal selbst mit Matrizen nachrechnen, wobei man sich entsprechend die Additionstheoreme zu Nutze macht.

Wir haben also mit $F : G(R) \to D_n$ einen surjektiven Gruppenhomomorphismus und wir wissen, dass die Ordnung beider Gruppen gleich $2n$ ist. Damit muss F schon ein Isomorphismus sein.