Übung zur Vorlesung
Einführung in die Algebra

Prof. Dr. J. H. Bruinier
Stephan Ehlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2009
Übungsblatt 6

Aufgabe G6.1 $G/Z(G)$ ist niemals nicht-trivial zyklisch

Es sei G eine Gruppe und $N \subset Z(G)$ eine Untergruppe des Zentrums, so dass G/N zyklisch ist. Weiterhin sei $x \in G$ ein Element, so dass xN die Gruppe G/N erzeugt.

(a) Sei $g \in G$. Zeigen Sie, dass $n \in \mathbb{N}$ und $z \in N$ existieren, so dass $g = x^n z$.

(b) Zeigen Sie: Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch und somit $G/Z(G)$ trivial.

Aufgabe G6.2 Konjugationsoperation

Es sei $(G, \cdot, 1)$ eine Gruppe.

(a) Rechnen Sie noch einmal selbst nach, dass die Konjugationsoperation $\sigma : G \times G \to G$, $\sigma(g, x) := gxg^{-1}$ eine Operation von G auf G ist.

(b) Der Stabilisator G_x eines Elements $x \in G$ unter der Konjugationsoperation aus Teil (a) wird auch der *Zentralisator von* x genannt. Zeigen Sie, dass $G_x = G$ genau dann, wenn x Element des Zentrums $Z(G)$ von G ist.

(c) Die Bahn $\mathcal{O}_x$ von $x \in G$ unter der Konjugationsoperation nennt man die *Konjugationsklasse von* x und schreibt auch $x^G := \mathcal{O}_x$. Was ist 1^G? Zeigen Sie, dass $x^G = \{x\}$ genau dann, wenn $x \in Z(G)$.

(d) Zeigen Sie: Ist $|G| = p^n$ eine Primzahlpotenz, so sind auch $|G_x|$ und $|x^G|$ Potenzen von p.

(e) Zeigen Sie mit (c) und (d): Ist $|G| = p^n > 1$ eine Primzahlpotenz, so ist $Z(G) \neq \{1\}$.

(f) Zeigen Sie mit Teil (e) und Aufgabe G6.1: Ist G eine Gruppe der Ordnung p^2 (wobei p eine Primzahl ist), so ist G abelsch.

Aufgabe G6.3 Extremalpunkte konvexer Mengen

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge, d.h. mit zwei Punkten $x, y \in M$ liegt auch deren Verbindungsstrecke

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : 0 \leq t \leq 1\}$$

in M. Weiterhin sei $]x, y[:= \{x + t(y - x) : 0 < t < 1\}$. Ein Punkt $x \in M$ heißt *extremal*, wenn für alle $y, z \in M$ mit $x \in\,]y, z[$ schon $x = y = z$ gilt. Es bezeichne $E(M)$ die Menge der Extremalpunkte von M.

(a) Bestimmen Sie die Menge $E(R)$ für das Rechteck $R := [-a, a] \times [-b, b] \subseteq \mathbb{R}^2$ (für $a, b > 0$).

(b) Zeigen Sie, dass jede Symmetrie $g \in G(M)$ von M die Menge $E(M)$ invariant lässt, d.h. es ist $g(x) \in E(M)$ für alle $x \in E(M)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\sigma : G(M) \times E(M) \to E(M)$, $\sigma(g, x) := g(x)$ eine Operation von $G(M)$ auf der Menge $E(M)$ der Extremalpunkte von M definiert.

Aufgabe G6.4 Mittelpunkt

Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ zwei verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt $m(x, y) := \frac{1}{2}(x + y)$ der einzige Punkt ist, der von beiden Punkten den gleichen Abstand $\frac{1}{2}d(x, y)$ besitzt und dass er unter den Punkten mit gleichem Abstand zu x und y den minimalen Abstand hat. Hierbei ist $d(x, y) = \| x - y \|_2$ die euklidische Metrik.

Aufgabe H6.1 Normalisator und Zentralisator

Sei G eine Gruppe und $M \subset G$ eine Teilmenge. Man bezeichnet mit

$$Z_M := \{x \in G : xm = mx \text{ für alle } m \in M\}$$

den *Zentralisator* von M in G und mit

$$N_M := \{x \in G : xM = Mx\}$$

den *Normalisator* von M in G. Zeigen Sie:

(a) Z_M und N_M sind Untergruppen von G. (Vgl. auch Aufgabe G6.2!)

(b) Zeigen Sie: Ist $H \subset G$ eine Untergruppe von G, so ist N_H die größte Untergruppe in der H ein Normalteiler ist.

(c) Es sei wieder $H \subset G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass $Z_H \subseteq N_H$ Normalteiler in N_H ist. Zeigen Sie weiter, dass N_H/Z_H isomorph zu einer Untergruppe der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(H)$ ist. (*Hinweis:* Vgl. Aufgabe H2.3 (c).)

Aufgabe H6.2 Extremalpunkte des Würfels und des Einheitskreises

(a) Bestimmen sie die Mengen $E(W)$ und $E(\mathbb{D})$ der Extremalpunkte des Würfels $W := [-1,1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ und $E(\mathbb{D})$ der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} := \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass die Operation der Symmetriegruppe $G(W)$ des Würfels W auf der Menge der Extremalpunkte $E(W)$ transitiv ist (siehe Aufgabe G6.3 (c)).

Aufgabe H6.3 Schwerpunkte

Sei $M := \{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere, endliche Teilmenge. Wir definieren den Schwerpunkt von M als

$$b_M := \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_k.$$

(a) Zeigen Sie, dass jede invertierbare affine Abbildung $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ den Schwerpunkt von M erhält, das heißt es gilt

$$\varphi(b_M) = b_{\varphi(M)}.$$

(b) Zeigen Sie außerdem, dass für jede Symmetrie $g \in G(M)$ einer beliebigen Menge $M \in \mathbb{R}^2$ für je zwei Punkte $x, y \in M$ gilt $m(g(x), g(y)) = g(m(x,y))$, wobei $m(x,y)$ den Mittelpunkt aus Aufgabe G6.4 bezeichnet.

(c) Gegeben Sei eine konvexe Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Extremalpunkten $E(M)$, so dass $b_{E(M)} = 0 \in \mathbb{R}^n$. Folgern Sie, dass für die Symmetriegruppe $G(M)$ gilt $G(M) \subset O_n(\mathbb{R})$.

Aufgabe H6.4 Die Diedergruppe D_n

Es sei $R \subset \mathbb{R}^2$ das reguläre n-Eck, dessen Ecken e_k für $k = 0, \ldots, n-1$ gegeben seien durch

$$e_k = \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right).$$

(a) Was sind die Extremalpunkte $E(R)$? Was ist der Schwerpunkt $b_{E(R)}$ von $E(R)$? Was folgt hieraus?

(b) Bestimmen Sie den Stabilisator $G(R)_{e_0}$ von e_0. Andererseits, was ist die Bahn von e_0? Was sagt nun die Bahnengleichung?

(c) Zeigen Sie, dass die Symmetriegruppe $G(R)$ isomorph zur Diedergruppe $D_n := C_n \rtimes_\alpha C_2$ der Ordnung $2n$ ist. Hierbei ist C_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln und $\alpha : C_2 \to \mathrm{Aut}(C_n)$ ist definiert durch

$$\alpha(\varepsilon)(z) = z^\varepsilon.$$

Hinweis: Die Hausaufgaben sind die mit dem Buchstaben “H” gekenzeichneten Aufgaben. Die bearbeiteten Aufgaben werden am 7.7. bzw. 8.7. zu Beginn der Übungen abgegeben. *Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.*