Übung zur Vorlesung
Einführung in die Algebra

Prof. Dr. J. H. Bruinier
Stephan Ehlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2009
Übungsblatt 5

Aufgabe G5.1 Ordnungen berechnen

(a) Gegeben $n, m \in \mathbb{Z}$ bestimme man die Ordnung von $\overline{m}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(b) Es seien G, H endliche Gruppen und $x \in G$, $y \in H$. Drücken Sie die Ordnung von $(x, y) \in G \times H$ durch die Ordnungen von x und y aus. Hinweis: Untersuchen Sie den Kern von $\phi : \mathbb{Z} \to G \times H$, $\phi(n) := (x, y)^n = (x^n, y^n)$.

(c) Finden Sie die Ordnung des Elements $(\overline{2}, \overline{3})$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Aufgabe G5.2 Exakte Sequenzen

Unter einer **exakten Sequenz** (von Gruppen) versteht man eine Folge

$$G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{r-1}} G_r,$$

wobei $G_1, \ldots, G_r$ Gruppen und $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ Gruppenhomomorphismen sind mit $\operatorname{im} \varphi_i = \ker \varphi_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, r-2$.

Unter einer **kurzen exakten Sequenz** versteht man eine exakte Sequenz der Form

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H \longrightarrow 1, \tag{1}$$

wobei man mit 1 die triviale Gruppe bezeichnet, die nur aus dem neutralem Element besteht. Man sagt auch, dass G eine **Erweiterung** von H durch N ist.

(a) Überlegen Sie sich, warum man bei einer kurzen exakten Sequenz den ersten und den letzten Pfeil nicht beschriften muss.

(b) Sei $N \lhd G$ ein Normalteiler der Gruppe G. Zeigen Sie, dass

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G/N \longrightarrow 1,$$

eine kurze exakte Sequenz ist, wobei $\iota : N \to G$ die Inklusionsabbildung und $\pi : G \to G/N$ die kanonische Projektion sind. Überlegen Sie sich, dass dies gewissermaßen der Prototyp einer kurzen exakten Sequenz ist: Gegeben (1), so ist $H \cong G/N$.

(c) Es sei $G = N \times H$ das direkte Produkt der Gruppen N und H. Überlegen Sie sich, wie man unter Beteiligung von G, N und H eine kurze exakte Sequenz erhält.

(d) Es seien G, H und N Gruppen. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. Es existiert ein Gruppenhomomorphismus $\alpha : H \to \operatorname{Aut}(N)$, so dass G isomorph ist zu dem semidirekten Produkt $N \rtimes_\alpha H$.
2. Es existiert eine kurze exakte Sequenz und ein Homomorphismus $\sigma : H \to G$ mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_H$:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varphi"] & G \arrow[r, "\pi"] & H \arrow[l, bend left, "\sigma"] \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Man sagt in diesem Falle auch, dass die obige Sequenz **spaltet**.

Aufgabe G5.3 Alle abelschen Gruppen der Ordnung 6

Es sei G eine Gruppe der Ordnung 6.

(a) Zeigen Sie, dass G ein Element a der Ordnung 3 enthält (Hinweis: Sonst hätte jedes von 1 verschiedene Element die Ordnung 2).

(b) Zeigen Sie, dass G ein Element b der Ordung 2 enthält.

(c) G sei nun zusätzlich abelsch. Zeigen Sie, dass $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Aufgabe G5.4 Beispiel zu Gruppenoperationen und Bahnen

Gegeben eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sigma(t,z) := e^{t\lambda} z\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass σ eine Operation von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ ist.

(b) Beschreiben Sie und skizzieren Sie die Bahnen dieser Operation. Wie hängt die Gestalt der Bahnen von λ ab?

Aufgabe H5.1 Semidirekte Produkte abelscher Gruppen und $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$

(a) Es seien G und N abelsche Gruppen und $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass das semidirekte Produkt $N \rtimes_\alpha G$ genau dann abelsch ist, wenn α trivial ist, d.h. $\alpha(g) = \mathrm{id}_N$ für alle $g \in G$.

(b) Es sei $G := \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p. Zeigen Sie, dass $N := p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Normalteiler von G ist. Außerdem Sei $H := G/N$. Zeigen Sie, dass G für keinen Gruppenhomomorphismus $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(N)$ isomorph zu $N \rtimes_\alpha H$ ist.

Aufgabe H5.2 Alle nicht-abelschen Gruppen der Ordnung 6

Es sei G eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung 6; dann existieren Elemente $a, b \in G$ der Ordnungen 3 und 2 (siehe Aufgabe G5.3).

(a) Begründen Sie, warum $\langle a \rangle$ ein Normalteiler von G ist.

(b) Nach Teil (a) gilt $b^{-1}ab \in \langle a \rangle$, also $b^{-1}ab = a^i$ für ein $i \in \{0,1,2\}$. Zeigen Sie, dass $i = 2$ und damit $ab = ba^2$ gelten muss.

(c) Zeigen Sie, dass $G = \langle a, b \rangle$ und $G \cong D_3$, wobei D_3 die Diedergruppe aus Aufgabe H4.2 ist.

Aufgabe H5.3 Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen

Gegeben sei die Gruppe

$$\Delta := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\}$$

der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen, ihre Untergruppe

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R}^\times \right\}$$

der invertierbaren Diagonalmatrizen und ihr Normalteiler

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe G5.2 (d), dass $\Delta \cong N \rtimes_\alpha H$ für einen geeigneten Gruppenhomomorphismus $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(N)$. Geben Sie hierbei α konkret an!

Aufgabe H5.4 Möbiustransformationen

Es sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die komplexe obere Halbebene. Weiterhin sei $G := \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma : G \times \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ \sigma(A, z) = A.z = \frac{az + b}{cz + d},$$

eine Gruppenoperation definiert wird, wobei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}/\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) = \{G.i\}$ ist, wobei $G.i = \{A.i : A \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})\}$ die Bahn von $i \in \mathbb{H}$ bezeichnet. Das heißt, dass die Gruppe $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ **transitiv** auf $\mathbb{H}$ operiert. Finden Sie hierzu eine Matrix $A_z \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ so dass $A_z.i = z$ ist.

(c) Bestimmen Sie den Stabilisator G_i von i in $G = \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$.

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})/G_i \to \mathbb{H},\ [A] \mapsto A.i$$

wohldefiniert (d.h. unabhängig von der Wahl des Vertreters) und bijektiv ist ($[A] = AG_i$ bezeichnet die Linksnebenklasse eines Elements $A \in G$).

Hinweis: Die Hausaufgaben sind die mit dem Buchstaben “H” gekenzeichneten Aufgaben. Aufgaben, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind freiwillige Zusatzaufgaben. Die bearbeiteten Aufgaben werden am 23. bzw. 24.6. zu Beginn der Übungen abgegeben. *Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.*