Übung zur Vorlesung Einführung in die Algebra

Prof. Dr. J. H. Bruinier
Stephan Ehlen

Sommersemester 2009
Übungsblatt 4

Aufgabe G4.1 Isomorphe Gruppen

Es seien $(G, \circ, 1)$ und $(H, *, 1)$ Gruppen und $\phi : G \to H$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Ist G endlich, so auch H.

(b) Ist G abelsch, so auch H.

(c) Ist G zyklisch, so auch H.

(d) Gibt es zu allen Elementen $x \neq 1$ und $y \neq 1$ in G Zahlen $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $x^n = y^m$, so hat auch H die entsprechende Eigenschaft.

Aufgabe G4.2 Was kann zwei Gruppen unterscheiden?

Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen nicht isomorph sind:

(a) $(\mathbb{R}, +, 0)$ und $(\mathbb{Q}, +, 0)$

(b) $(\mathbb{R}, +, 0)$ und $(S^1, \cdot, 1)$, wobei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

(c) $(\mathbb{Q}, +, 0)$ und $(\mathbb{Q}^2, +, 0)$

(d) $(\mathbb{R}, +, 0)$ und $(\mathbb{R}^\times, \cdot, 1)$

Aufgabe G4.3 Untergruppen von $\mathbb{Z}$

Seien m, n natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = mn\mathbb{Z}$.

(b) $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

Aufgabe G4.4 Abelsche Gruppen und Normalteiler

Es sei G eine abelsche Gruppe und N eine Untergruppe (und somit ein Normalteiler) von G.

(a) Zeigen Sie, dass auch die Quotientengruppe G/N abelsch ist.

(b) Zeigen Sie: Ist G zyklisch, so auch G/N.

Aufgabe G4.5 Die Quotientengruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Im folgenden wird die Quotientengruppe $G := \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ der additiven Gruppe $(\mathbb{Q}, +, 0)$ betrachtet. Bestimmen Sie die Torsionsuntergruppe $\mathrm{tor}(G)$ (vgl. Aufgabe H2.2 (d)).

Aufgabe G4.6 Inversion

Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie: Ist die Inversion $i : G \to G$, $i(x) := x^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist G abelsch.

Aufgabe H4.1 Gruppen gerader Ordnung

Es sei $(G, \circ, 1)$ eine endliche Gruppe *gerader* Ordnung. Zeigen Sie, dass es ein Element $a \neq 1$ in G gibt mit $a^{-1} = a$. Kann diese Schlussfolgerung auch für eine Gruppe ungerader Ordnung erfüllt sein ?

Aufgabe H4.2 Die Diedergruppe D_3

(a) Es sei G eine Gruppe, die von zwei Elementen a, b erzeugt wird, welche die Relationen $a^3 = b^2 = 1$ und $ab = ba^2$ erfüllen. Zeige, dass sich jedes Element von G in der Form $a^i b^j$ mit $i \in \{0, 1, 2\}$ und $j \in \{0, 1\}$ schreiben lässt.

(b) Finde Matrizen $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ derart, dass die Relationen aus (a) erfüllt sind und die von A, B erzeugte Untergruppe $D_3 := \langle A, B\rangle \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die Ordnung 6 hat. Finde ein Dreieck $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$, welches von den den Elementen $M \in D_3$ entsprechenden linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto Mv$ surjektiv auf sich selbst abgebildet wird.

[Hinweis: Die Interpretation als Symmetrien eines Dreiecks hilft beim Erraten von A und B !]

(c) Finde alle Untergruppen der Gruppe D_3. Welche sind Normalteiler?

(d) Zeige, dass für jede Gruppe G und Elemente $a, b \in G$ wie in (a) die Abbildung

$$\phi : D_3 \to G, \quad \phi(A^i B^j) := a^i b^j \qquad \text{für } i \in \{0, 1, 2\},\ j \in \{0, 1\}$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphimus ist. Bestimme nun (bis auf Isomorphie) alle möglichen Gruppen G der in (a) beschriebenen Art.

Aufgabe H4.3 Alle Gruppen der Ordnung 4

(a) Es sei G eine abelsche Gruppe, U und V seien Untergruppen von G. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\alpha : U \times V \to G, \quad \alpha(u, v) := uv$$

ein Gruppenhomomorphismus ist, mit $\ker \alpha = \{(u, u^{-1}) : u \in U \cap V\}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 4 abelsch ist.

[Hinweis: Welche Ordnungen kommen für Gruppenelemente überhaupt in Frage ?]

(c) Bestimmen Sie nun bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 4.

Aufgabe H4.4 Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen.

(a) Bestimmen Sie die Ordnung der Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^\times$.

(c) Bestimmen Sie die Ordnung der Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$.

Hinweis: Die Hausaufgaben sind die mit dem Buchstaben "H" gekenzeichneten Aufgaben. Aufgaben, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind freiwillige Zusatzaufgaben. Die bearbeiteten Aufgaben werden am 9. bzw. 10.6. zu Beginn der Übungen abgegeben. *Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.*