Übung zur Vorlesung Einführung in die Algebra

Prof. Dr. J. H. Bruinier
Stephan Ehlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2009
Übungsblatt 2

Aufgabe G2.1 Abelsche Gruppen

Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\prod_{g\in G} g^2 = 1.$$

Aufgabe G2.2 Prüfen der Gruppenaxiome

Wir definieren eine Verknüpfung $\circ\colon\ (-1,1)\times(-1,1)\to(-1,1)$ durch

$$r\circ s := \frac{r+s}{1+rs} \qquad \text{für } r,s\in\ (-1,1),$$

unter Benutzung der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass tatsächlich $r\circ s\in\ (-1,1)$ gilt.
Ist $((-1,1),\circ,0)$ eine Gruppe?

Aufgabe G2.3 Charakterisierungen von Untergruppen

Es sei G eine Gruppe und $H\subseteq G$ eine Teilmenge.

(a) Zeigen Sie, dass H genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn das neutrale Element 1 in H enthalten ist und

$$\forall x,y\in H:\quad xy^{-1}\in H \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass H genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $H\neq\emptyset$ und (1) gilt.

Aufgabe G2.4 Eigenschaften von Gruppenhomomorphismen

Seien G,H Gruppen und $\varphi: G\to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker(\varphi)=\{1_G\}$ ist.

(b) φ ist genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{im}(\varphi)=H$ ist.

(c) φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn φ bijektiv ist.

Aufgabe G2.5 Allgemeine Potenzen

Es sei $(G,\circ,1)$ eine Gruppe und $g\in G$. Rekursiv definieren wir Potenzen von g via $g^0:=1$ sowie

$$g^n := g^{n-1}g,\quad g^{-n}:=g^{-(n-1)}g^{-1}=(g^{-1})^n$$

für alle $n\in\mathbb{N}$.

(a) Machen Sie sich klar, dass $g^ng^m=g^{n+m}$ für alle $n,m\in\mathbb{N}_0$.

(b) Machen Sie sich klar, dass $g^ng^{-n}=1$ und somit $g^{-n}=(g^n)^{-1}$, für alle $n\in\mathbb{N}$.

(c) Nun zeigen Sie, dass $g^ng^m=g^{n+m}$ für alle $n,m\in\mathbb{Z}$ (Fallunterscheidung !)

Aufgabe H2.1 Abelsche Gruppen

(a) Es sei G eine Gruppe. Für alle $g \in G$ gelte $g^2 = 1$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(b) Es sei G eine zyklische Gruppe. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(c) Es seien $(G, \cdot, 1)$ und $(H, +, 0)$ Gruppen. H sei außerdem abelsch. Es sei $\mathrm{Hom}(G, H)$ die Menge der Gruppenhomomorphismen von G nach H. Wir definieren die Summe von $f, g \in \mathrm{Hom}(G, H)$ als

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(G, H)$ so zu einer abelschen Gruppe wird.
Funktioniert dies auch, wenn H nicht abelsch ist?

Aufgabe H2.2 Verschiedenes zu Gruppen

Es sei G eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Sind a, b, c Elemente von G mit $ab = ac$, so ist $b = c$.

(b) Es sei x ein Element von G derart, dass $x^n = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es dann ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $x^m = x^{-1}$.

(c) G sei endlich. Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 1$ gibt.

(d) G sei abelsch. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{tor}(G) := \{x \in G : (\exists n \in \mathbb{N})\ x^n = 1\}$$

eine Untergruppe von G ist (genannt die "Torsionsuntergruppe").

(e)* Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass $\mathrm{tor}(G)$ keine Untergruppe von G sein muss, wenn G nicht abelsch ist.

Aufgabe H2.3 Gruppenautomorphismen

Sei G eine Gruppe und $\mathrm{Aut}(G)$ bezeichne die Menge der Automorphismen von G.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(G)$ mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen eine Gruppe bildet.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $a \in G$ die Abbildung

$$\varphi_a : G \to G, \quad g \mapsto aga^{-1}$$

in $\mathrm{Aut}(G)$ enthalten ist. Die Abbildung ist ein sogenannter *innerer Automorphismus* von G.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\psi : G \to \mathrm{Aut}(G), \quad g \mapsto \varphi_g,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe H2.4 Gruppenisomorphismen

(a) Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$$

einen Isomorphismus der Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ definiert.

(b) Kann es auch einen Gruppenisomorphismus zwischen der additiven Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ und der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ geben?

Hinweis: Die Hausaufgaben sind die mit dem Buchstaben "H" gekenzeichneten Aufgaben. Aufgaben, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind freiwillige Zusatzaufgaben. Die bearbeiteten Aufgaben werden am 12. bzw. 13.5. zu Beginn der Übungen abgegeben. *Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.*