Übung zur Vorlesung
Einführung in die Algebra

Prof. Dr. J. H. Bruinier
Stephan Ehlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2009
Übungsblatt 1

Testaufgabe 1.1 Wahr oder falsch?

Eine Gruppe ist ...

- ◯ definiert als eine unter Multiplikation und Inversion abgeschlossene Menge.
- ◯ eine Menge von Symmetrien.
- ◯ ein Spezialfall eines Monoids.
- ◯ ein Spezialfall einer Halbgruppe.

Aufgabe G1.1 Äquivalenzrelationen

Sei X eine Menge. Eine *Äquivalenzrelation* $\sim$ auf einer Menge X ist eine reflexive, transitive, symmetrische Relation auf X. Gegeben $x \in X$ heißt $[x] := \{y \in X : y \sim x\}$ die *Äquivalenzklasse von* x. Mit $X/\sim := \{[x] : x \in X\}$ wird die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnet.

(a) Zeigen Sie: Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so ist X die *disjunkte Vereinigung* sämtlicher Äquivalenzklassen $[x] \in X/\sim$.

(b) Zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, seien äquivalent (schreibe $z_1 \sim z_2$) genau dann, wenn $z_2 = wz_1$ für eine komplexe Zahl w mit $|w| = 1$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}$ ist. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von 0, 1 und 2 und fertigen Sie eine Skizze an. Beschreiben Sie die Menge $\mathbb{C}/\sim$ aller Äquivalenzklassen (in geometrischer Sprache).

Aufgabe G1.2 Assoziativgesetz für mehrfache Produkte I

Sei $(S, \circ)$ eine Halbgruppe. Wir wollen zeigen, dass auch in Produkten vieler Elemente die Klammersetzung keine Rolle spielt. Hierzu betrachten wir in dieser Aufgabe zunächst nur in einer festen Reihenfolge geklammerte Produkte.

Seien $x_1, \ldots, x_n \in S$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Wir definieren rekursiv $x_1 \circ \cdots \circ x_n := (x_1 \circ \cdots \circ x_{n-1}) \circ x_n$ (was im Falle $n = 2$ als $x_1 \circ x_2$ zu lesen ist). Zeigen Sie per Induktion über $k \in \mathbb{N}$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots, x_{n+k} \in S$ gilt:

$$x_1 \circ \cdots \circ x_{n+k} = (x_1 \circ \cdots \circ x_n) \circ (x_{n+1} \circ \cdots \circ x_{n+k}).$$

Aufgabe G1.3 Assoziativgesetz für mehrfache Produkte II

Jetzt betrachten wir ganz allgemein geklammerte Produkte. Sei wieder $(S, \circ)$ eine Halbgruppe. Rekursiv definieren wir: Das Produkt *eines* Elementes aus S sei das Element selbst. Sei nun $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in S$. Ein Element $p \in S$ heiße *Produkt der n Elemente* $x_1, \ldots, x_n$, wenn es ein $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ gibt, ein Produkt p_1 der k Elemente $x_1, \ldots, x_k$ und ein Produkt p_2 der $n-k$ Elemente $x_{k+1}, \ldots, x_n$ derart, dass $p = p_1 \circ p_2$. Veranschaulichen Sie sich die Definition zunächst für $n = 2, 3$.

Zeigen Sie per Induktion: Ist $p \in S$ ein Produkt der n Elemente $x_1, \ldots, x_n \in S$, so gilt

$$p = x_1 \circ \cdots \circ x_n,$$

wobei die rechte Seite wie in Aufgabe G 1.2 definiert ist. Insbesondere stimmen alle möglichen Produkte der n Elemente $x_1, \ldots, x_n$ überein.

Aufgabe G1.4 Untergruppe oder nicht?

Welche der folgenden Mengen sind Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe $GL_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} H_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}; \quad H_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\}; \\ H_3 &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\} ? \end{aligned}$$

Aufgabe H1.1 Faktorisieren von Abbildungen

Es sei $q : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Gegeben $x_1, x_2 \in X$ schreibe $x_1 \sim_q x_2$ genau dann, wenn $q(x_1) = q(x_2)$. Zeige, dass $\sim_q$ eine Äquivalenzrelation auf X ist.

(b) Zusätzlich sei nun q surjektiv und $f : X \to Z$ eine weitere Abbildung auf X. Zeige, dass es genau dann eine Abbildung $\overline{f} : Y \to Z$ mit $\overline{f} \circ q = f$ gibt, wenn $\sim_q \subseteq \sim_f$ (wenn also aus $q(x) = q(y)$ stets $f(x) = f(y)$ folgt).

Zeige, dass $\overline{f}$, falls es existiert, eindeutig festgelegt ist.

[Hinweis: Wann ist $\overline{f}(q(x)) := f(x)$ wohldefiniert ?]

Sprechweise: Man sagt in voriger Situation, dass f "über die Abbildung q faktorisiert "(oder auch: "über Y").
Man nennt $\overline{f}$ die "von f auf Y induzierte Abbildung."

Aufgabe H1.2 Untergruppen

Sei G eine Gruppe und $(H_j)_{j \in J}$ eine Familie von Untergruppen von G.

(a) Zeigen Sie, dass dann auch

$$H := \bigcap_{j \in J} H_j = \left\{ g \in G : g \in H_j \text{ für alle } j \right\}$$

eine Untergruppe von G ist.

(b) Ist M eine Teilmenge von G, so existiert eine Untergruppe $\langle M \rangle$ von G, die M enthält und in allen anderen Untergruppen von G enthalten ist, die M enthalten.

(c) Für eine Teilmenge $M \subset G$ besteht die von M erzeugte Untergruppe $\langle M \rangle$ genau aus den Elementen der Gestalt

$$m_1^{\varepsilon_1} m_2^{\varepsilon_2} \cdots m_k^{\varepsilon_k}, \quad k \in \mathbb{N}, m_j \in M, \varepsilon_j \in \{\pm 1\}.$$

Für $k = 0$ denken wir uns hier das "leere Produkt" 1.

Aufgabe H1.3 Vereinigungen von Untergruppen

Sei G eine Gruppe. Beweisen oder widerlegen Sie: Sind $H_1, H_2 \subset G$ zwei Untergruppen von G, so ist die Vereinigung $H_1 \cup H_2$ eine Untergruppe von G.

Aufgabe H1.4 Beispiele von Untergruppen

(a) Es sei X eine unendliche Menge und

$$S_{X,\text{fin}} := \{\phi \in S_X : \text{die Menge } \{x \in X : \phi(x) \neq x\} \text{ ist endlich}\}.$$

Zeige, dass $S_{X,\text{fin}}$ eine Untergruppe der Gruppe S_X aller Permutationen von X ist.

(b) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeige, dass die Menge

$$\text{Aff}(V) := \{\phi \in S_V : \phi \text{ ist bijektiv und affin}\}$$

der invertierbaren affinen Abbildungen eine Untergruppe von S_V ist.

Hinweis: Die Hausaufgaben sind die mit dem Buchstaben "H" gekenzeichneten Aufgaben. Die bearbeiteten Aufgaben werden am 28. bzw. 29.4. zu Beginn der Übungen abgegeben. Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen.