

Skript zur Vorlesung
Elementare partielle Differentialgleichungen

Prof. Dr. R. Farwig

SS 2008

Technische Universität Darmstadt



1 Mathematische Modellierung

Partielle Differentialgleichungen kommen in den Naturwissenschaften (Physik, Chemie, Biologie), den Ingenieurwissenschaften (Maschinenbau, Elektrotechnik, Mechanik, Materialwissenschaften, Bauingenieurwesen, Geowissenschaften etc.), aber auch den Wirtschaftswissenschaften (insbesondere Finanzmathematik) vor. Zudem haben sie über Jahrhunderte die Entwicklung der mathematischen Analysis beflügelt. Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen, die entweder eine rein zeitliche Entwicklung (Anfangswertprobleme) oder eine rein räumliche, jedoch eindimensionale Entwicklung (Randwertprobleme) beschreiben, modellieren partielle Differentialgleichungen entweder Vorgänge in mehreren Raumdimensionen oder räumlich-zeitliche Vorgänge.

Im Folgenden sollen – ausgehend von einem einfachen räumlich eindimensionalen und zeitlich veränderlichen Prozess – Modelle aus verschiedenen Anwendungsgebieten und mit steigender Komplexität hergeleitet werden.

Eine *Zustandsvariable* $u = u(t, x)$ beschreibe die *Dichte* einer gewissen Größe, wie z.B. Masse, Energie, Bakterien, Autos etc. am Ort $x \in \mathbb{R}$ und zum Zeitpunkt t in einer Röhre kleinen konstanten Querschnitts A .

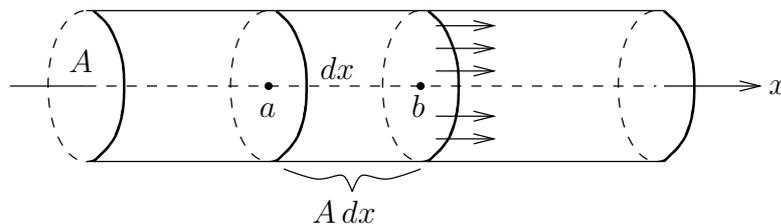


Abbildung 1.1: Zur Massenbilanz in der Röhre

Dann ist $u(t, x) A dx$, $dx = b - a$, die im Röhrenabschnitt $A dx$ enthaltene Menge. Der *Fluss* der Größe u werde im Raum-Zeitpunkt (t, x) durch die *Flussfunktion* $\phi = \phi(t, x, u, \dots)$ beschrieben; dabei werden wegen des kleinen Querschnitts A Fluktuationen in den zu x orthogonalen Raumrichtungen vernachlässigt. Also ist $A\phi(t, x)$ die Menge, die zur Zeit t durch den Querschnitt A an der Position x fließt. Als Konvention bedeutet dabei $\phi > 0$ ein Fluss nach rechts in Richtung wachsender x -Werte. Schließlich sei $f = f(t, x)$ ein *Quellterm*, so dass $f(t, x) A dx$ die Menge bezeichnet, die im Röhrenabschnitt $A dx$ zur Zeit t erzeugt ($f > 0$, Quelle) oder vernichtet ($f < 0$, Senke) wird.

Damit erhält man in $[t_1, t_2] \times [a, b] (\times A)$ die *Bilanzgleichung*

$$\begin{aligned} & \int_a^b (u(t_2, x) - u(t_1, x)) A dx \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (A\phi(t, a) - A\phi(t, b)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b f(t, x) A dx dt \end{aligned}$$

in Integralform. Unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen folgt nach Division durch $A(t_2 - t_1)(b - a)$ im Grenzfall $t_2 \rightarrow t_1$, $b \rightarrow a$ die *Erhaltungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) = f(t, x)$$

oder kürzer

$$\boxed{u_t + \phi_x = f.} \quad (1.1)$$

An dieser Stelle fehlt noch eine sich aus dem konkreten Problem ergebende *Zustandsgleichung*

$$\phi = \phi(t, x, u, \dots),$$

um eine partielle Differentialgleichung für die gesuchte Funktion u zu erhalten.

Beispiel 1.1 Der Fluss ϕ sei proportional zu u ,

$$\phi(t, x, u) = cu, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $f \equiv 0$ (keine Quellen oder Senken) liefert (1.1) die *Konvektionsgleichung* (auch *Advektions- oder Transportgleichung*)

$$\boxed{u_t + cu_x = 0.} \quad (1.2)$$

Zur Lösung führen wir neue Variablen

$$\xi = x - ct, \quad \tau = t \quad (1.3)$$

sowie

$$v(\tau, \xi) := u(t, x) = u(\tau, \xi + c\tau)$$

ein. Dann erfüllt v die Gleichung

$$v_\tau = u_t + cu_x = 0,$$

und läßt sich folglich in der Form $v(\tau, \xi) = F(\xi)$ schreiben. Demnach besitzt u die Darstellung

$$u(t, x) = F(x - ct) \quad (1.4)$$

und wird als *travelling wave* bezeichnet. Die Konstante c ist die *Transportge-*

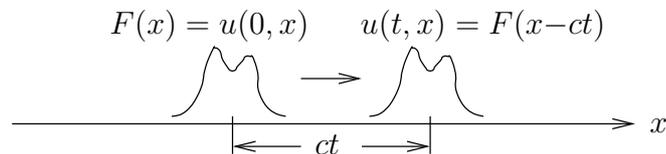


Abbildung 1.2: Eine travelling wave-Lösung

schwindigkeit, mit der die Anfangsinformation $u(0, x) = F(x)$ im Falle $c > 0$ nach rechts transportiert wird.

Beispiel 1.2 Bekanntlich wird ein einfacher Wachstums- oder Zerfallsprozess durch die gewöhnliche Differentialgleichung $\frac{du}{dt} = \lambda u$ ($\lambda > 0$ oder $\lambda < 0$) mit Lösung $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ modelliert. Mit dem Quellterm $f(u) = \lambda u$ ($\lambda > 0$: Quelle, $\lambda < 0$: Senke) und der Zustandsgleichung $\phi = cu$ liefert (1.1) die inhomogene Konvektionsgleichung

$$u_t + cu_x = \lambda u,$$

die ebenfalls mit der in Beispiel 1.1 beschriebenen Methode gelöst werden kann. Allgemeiner erhält man mit $f = f(t, x, u)$ die *Konvektions-Reaktionsgleichung*

$$u_t + cu_x = f(t, x, u).$$

Beispiel 1.3 Es bezeichne $u(t, x)$ die Anzahl von Autos zur Zeit t pro Straßenkilometer auf einer einspurigen Straße und $\phi(t, x, u)$ die Anzahl von Autos, die pro Stunde den Raum-Zeitpunkt (t, x) passieren. In einem einfachen *Staumodell* wird ϕ durch

$$\phi = \phi(u) = \alpha u(\beta - u), \quad \alpha, \beta > 0,$$

modelliert; d.h., für $0 \leq u \ll \beta$ wächst $\phi(u)$ linear wie $\alpha\beta u$ an, für $u \approx \beta$ dagegen wird die große Dichte an Autos den Verkehrsfluss allmählich zum Erliegen bringen. Für $f \equiv 0$ liefert (1.1) die *Staugleichung*

$$u_t + \alpha(u(\beta - u))_x = 0.$$

Mit $v(t, x) = \beta - 2u(\frac{t}{\alpha}, x)$ erhält man daraus die *Burgers-Gleichung*

$$\boxed{v_t + vv_x = 0.} \tag{1.5}$$

Ein besonders vorausschauender Autofahrer wird die Geschwindigkeit nicht nur bei großer Verkehrsdichte ($u \approx \beta$) reduzieren, sondern bereits bei *Zunahme* der Verkehrsdichte vor ihm ($u_x > 0$). Mit Hilfe der verallgemeinerten Zustandsgleichung

$$\phi(u, u_x) = \alpha u(\beta - u) - \varepsilon' u_x, \quad \varepsilon' > 0,$$

entsteht die Gleichung 2. Ordnung

$$u_t + \alpha(u(\beta - u))_x - \varepsilon' u_{xx} = 0$$

und nach Transformation auf v die *viskose Approximation der Burgers-Gleichung* (auch ebenfalls Burgers-Gleichung genannt) mit $\varepsilon = \varepsilon'/\alpha$

$$v_t + vv_x = \varepsilon v_{xx}. \tag{1.6}$$

Dabei heißt $\varepsilon > 0$ *Viskositätskoeffizient*. Es zeigt sich, dass der Term εv_{xx} zu einer Glättung der Lösungen von (1.6) gegenüber den Lösungen von (1.5) führt (glatter Verkehrsfluss statt Staubildung).

Beispiel 1.4 Sei u die Konzentration eines Gases (oder z.B. von Insekten/Bakterien in einer Röhre) bzw. sei u die Temperatur in einem Metallstab. Auf Grund der Stöße der einzelnen Teilchen untereinander wird sich Gas von hohen zu niedrigen Konzentrationen bewegen. Der Fluss ist dabei umso größer, je steiler das Konzentrationsgefälle, also der negative Gradient $-u_x$, ist. In diesem Falle wird die Zustandsgleichung $\phi(u) = -ku_x$ benutzt, so dass (1.1) zur *Diffusionsgleichung*

$$\boxed{u_t - ku_{xx} = 0} \quad (1.7)$$

mit der *Diffusionskonstanten* $k > 0$ führt.

Sei z.B. $\theta(t, x)$ die Temperatur, ρ die konstante Dichte und c die spezifische Wärme eines Metallstabs, so dass $u(t, x) = \rho c \theta(t, x)$ die Energiedichte bezeichnet. Nach dem klassischen *Fourier'schen Wärmeleitungsgesetz* ist der Wärmefluss ϕ proportional zu $-u_x$, d.h., mit dem Wärmeleitkoeffizienten $\kappa > 0$ gilt

$$\phi = -\kappa u_x.$$

Ist der Metallstab homogen und κ bzgl. x konstant, erhält man mit der *Wärmediffusionskonstanten* $k = \frac{\kappa}{\rho c} > 0$ die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\theta_t - k\theta_{xx} = 0. \quad (1.8)$$

Im allgemeinen Fall, in dem κ von x oder sogar von der Temperatur θ abhängt, folgen die komplexeren Gleichungen

$$\theta_t - (k(x)\theta_x)_x = 0$$

bzw. – als nichtlineares Problem –

$$\theta_t - (k(\theta)\theta_x)_x = 0.$$

Beispiel 1.5 Zur Herleitung der Wellengleichung betrachte man ein elastisches Seil mit Massendichte $\rho(t, x)$ und vertikaler Auslenkung $u(t, x)$ aus einer stationären Gleichgewichtslage. Wir nehmen an, dass bei kleiner Auslenkung und kleinen Winkeln ($|u_x| \ll 1$) die Spannung $T(t, x)$ im Punkt $(x, u(t, x))$ stets tangential zum Seil gerichtet ist und dass horizontale Bewegungen vernachlässigt werden dürfen.

Da kein horizontaler Massenaustausch stattfindet, gilt für beliebige Abszissenwerte $a < b$ und Zeitpunkte t unter Berücksichtigung des Bogenlängelements $\sqrt{1 + u_x^2} dx$ die Massenbilanz

$$\int_a^b \rho(t, x) \sqrt{1 + u_x^2} dx = \int_a^b \rho_0(x) dx$$

mit einer geeigneten Funktion $\rho_0(x) > 0$. Nach Division durch $b - a$ und Grenzübergang $b - a \rightarrow 0+$ folgt die Gleichung

$$\rho(t, x) \sqrt{1 + u_x^2} = \rho_0(x).$$

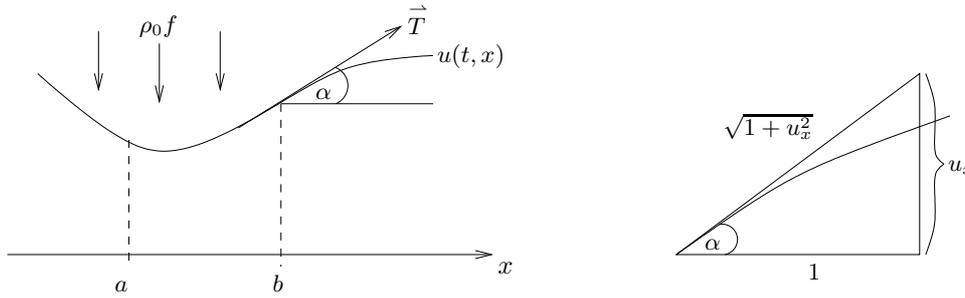


Abbildung 1.3: Zur Herleitung der Wellengleichung

Es bezeichne $\alpha(t, x)$ den Winkel des Seils mit der x -Achse; folglich gilt $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}$ und $\sin \alpha = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}$. Die horizontale Kräftebilanz

$$T(t, b) \cos \alpha(t, b) = T(t, a) \cos \alpha(t, a) \quad \text{für alle } a < b$$

impliziert, dass $T(t, x)/\sqrt{1+u_x^2}$ von x unabhängig ist. Es gibt also eine konstante Spannungsgröße $T_0 > 0$ mit

$$\frac{T(t, x)}{\sqrt{1+u_x^2}} = T_0,$$

die zusätzlich in t konstant angenommen werden darf. Nach dem Newton'schen Gesetz gilt bei einer von außen auferlegten senkrecht wirkenden Kraftdichte $f(t, x)$ für die vertikale Kraftbilanz

$$\int_a^b \rho_0(x) u_{tt} dx = T(t, x) \sin \alpha(t, x) \Big|_a^b + \int_a^b \rho_0 f dx. \quad (1.9)$$

Wegen $\sin \alpha = u_x/\sqrt{1+u_x^2}$ kann der erste Term auf der rechten Seite durch

$$T_0 u_x(t, x) \Big|_a^b = T_0 \int_a^b u_{xx} dx$$

ersetzt werden. Jetzt liefern Division durch $b-a$ und der Grenzübergang $b-a \rightarrow 0+$ in (1.9) die Differentialgleichung

$$\rho_0(x) u_{tt} = T_0 u_{xx} + \rho_0(x) f(t, x).$$

Schließlich führt man durch

$$c(x)^2 = \frac{T_0}{\rho_0(x)}$$

die Größe $c > 0$, die die Dimension einer Geschwindigkeit hat, ein. Damit erhält man, insbesondere wenn ρ_0 und damit auch c von x unabhängig sind, die klassische *eindimensionale Wellengleichung*

$$\boxed{u_{tt} - c^2 u_{xx} = f.} \quad (1.10)$$

Für das mehrdimensionale Analogon von (1.10) wird der Term u_{xx} durch den *Laplace-Operator*

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u = \operatorname{div}(\nabla u)$$

von $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ersetzt. Die Wellengleichung

$$\boxed{u_{tt} - c^2 \Delta u = f} \quad (1.11)$$

beschreibt im \mathbb{R}^2 die Schwingungen einer elastischen Membran, im \mathbb{R}^3 u.a. die Ausbreitung von Schallwellen. Die Gleichung (1.11) ist die Grundlage zur Modellierung vieler physikalischer Phänomene, u.a. in der Akustik, der Strömungsmechanik und der Theorie der elektromagnetischen Wellen.

Beispiel 1.6 Wir betrachten ein Fluid (Flüssigkeit oder Gas) der Dichte $\rho(t, x)$ und Geschwindigkeit $u(t, x)$ im Raum-Zeitpunkt (t, x) . Im eindimensionalen Fall beschreibt $\phi = \rho u$ den Massenfluss, so dass die Massenbilanz

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \quad (1.12)$$

lautet. Dagegen ist im \mathbb{R}^3 (oder \mathbb{R}^2) $u = (u_1, u_2, u_3)$ ein Geschwindigkeitsvektor. Zur Herleitung des Analogons von (1.12) betrachte man ein beliebiges, kleines Testvolumen $V \subset \mathbb{R}^3$. Nach dem Massenerhaltungsgesetz ist die zeitliche Änderung (Abnahme) der Gesamtmasse in V , also $-\int_V \rho_t dx$, gleich dem Massenfluss $\int_{\partial V} \rho u \cdot N d\sigma$ aus dem Testvolumen V heraus; dabei ist N der auf ∂V nach außen

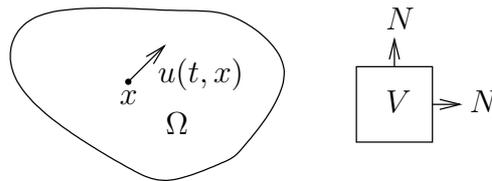


Abbildung 1.4: Zur Herleitung der Massenbilanz

gerichtete Normaleneinheitsvektor. Mit dem Gauß'schen Satz folgt

$$-\int_V \rho_t dx = \int_{\partial V} \rho u \cdot N d\sigma = \int_V \operatorname{div}(\rho u) dx.$$

Nach Division durch das Volumen $|V|$ von V liefert der Grenzübergang $|V| \rightarrow 0$ die sog. *Kontinuitätsgleichung*

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0. \quad (1.13)$$

Zur Analysis der Kräftebilanz beschreibe $x(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Teilchenbahn, so dass also $u(t, x(t)) = \frac{dx}{dt}$ ist. Dann ist der Beschleunigungsvektor im Raumzeitpunkt (t, x) gegeben durch

$$a(t, x(t)) = \frac{d}{dt} u(t, x(t)) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt},$$

also

$$a(t, x) = u_t + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_t + u \cdot \nabla u.$$

Nun treten in dem Fluid innere Kräfte wie z.B. Druckgradienten $\nabla p(t, x)$ auf. Ist das Fluid *reibungsfrei* und unterliegt einer äußeren Kraft ρf , liefert das Newton'sche Gesetz die *Euler-Gleichungen der Gasdynamik*

$$\begin{aligned} \rho(u_t + u \cdot \nabla u) + \nabla p &= \rho f, \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) &= 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

An dieser Stelle wird jedoch noch eine Zustandsgleichung für p wie z.B. $p = \text{const } \rho^\gamma$ mit $\gamma = \frac{5}{3}$ oder $\gamma = \frac{7}{5}$ benötigt.

Von großer Bedeutung ist der Fall *viskoser und inkompressibler* Fluide wie z.B. Wasser. Hier ist die Dichte ρ konstant, so dass (1.13) die Gleichung $\operatorname{div} u = 0$ liefert. Ferner wird ein Kraftterm $-\mu \Delta u$ in (1.14) eingefügt, der die Reibung von Teilchen unterschiedlicher Geschwindigkeit an gemeinsamen Grenzflächen berücksichtigt; $\mu > 0$ ist der Koeffizient der *dynamischen Zähigkeit*. Man erhält die *Navier-Stokes-Gleichungen*

$$\begin{aligned} \rho(u_t + u \cdot \nabla u) - \mu \Delta u + \nabla p &= \rho f, \\ \operatorname{div} u &= 0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

wobei in diesem Fall $p = p(t, x)$ eine unbekannte Funktion ist, für die keine Zustandsgleichung gefordert werden darf. Wir dividieren (1.15) durch die konstante Dichte $\rho > 0$, führen einen neuen Druck p für p/ρ und den Koeffizienten der *kinematischen Zähigkeit* $\nu = \mu/\rho$ ein, und vernachlässigen darüber hinaus für kleine Geschwindigkeiten den nichtlinearen Term $u \cdot \nabla u$. Dadurch entsteht aus (1.15) das lineare Stokes-System

$$\begin{aligned} u_t - \nu \Delta u + \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Im Fall zeitlich stationärer Strömungen erhält man die *stationäre Stokes-Gleichung*

$$\boxed{\begin{aligned} -\nu \Delta u + \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0; \end{aligned}} \tag{1.17}$$

hier hat der Druck $p(x)$ die Funktion eines Lagrange'schen Multiplikators, denn $u(x)$ soll eine Differentialgleichung unter der Nebenbedingung $\operatorname{div} u = 0$ lösen.

Beispiel 1.7 (Stationäre Probleme) (1) Eine Massenverteilung mit Dichte $\rho(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, im \mathbb{R}^3 besitzt ein Gravitationspotential $\varphi(x)$, welches durch die sog. *Poisson-Gleichung*

$$\Delta\varphi = 4\pi g \rho(x) \quad \text{im } \mathbb{R}^3$$

berechnet werden kann; dabei ist $g \doteq 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ die universelle Gravitationskonstante. Aus dem Potential φ leitet man das Gravitationsfeld $\nabla\varphi(x)$ her, so dass ein Massenpunkt der Masse m am Ort y die Kraft $-m \nabla\varphi(y)$ erfährt. Im einfachsten Fall ist die Massenverteilung auf einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ konzentriert, und man schreibt $\rho = \delta_{x_0} = \delta(\cdot - x_0)$ mit Hilfe der Dirac-Funktion oder δ -Distribution δ . Die Gleichung

$$\Delta\varphi = 4\pi g \delta_{x_0},$$

d.h. insbesondere

$$\Delta\varphi(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\},$$

besitzt – bis auf die multiplikative Konstante $-g$ – das Newton-Potential

$$\varphi(x) = \frac{1}{|x - x_0|}$$

als Lösung.

(2) Ein analoges Problem liegt in der Elektrostatik vor. Für eine gegebene Ladungsverteilung $\rho(x)$ ist die elektrostatische Kraft $f(y)$ gesucht, die diese Ladungsverteilung auf ein Teilchen mit Ladung q am Ort y ausübt. Dazu bestimmt man das Coulomb-Potential φ (im Vakuum) durch

$$-\Delta\varphi = 4\pi\rho$$

und erhält $f(y) = -q \nabla\varphi(y)$.

(3) Ein dreidimensionaler Körper $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ habe nach (unendlich) langer Zeit eine stationäre Wärmeverteilung angenommen. Unter der Annahme des Fourier'schen Gesetzes

$$\phi(x) = -k \nabla\theta(x)$$

(vgl. Beispiel 1.4) erhält man die partielle Differentialgleichung

$$-\operatorname{div}(k \nabla\theta) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

falls keine äußeren Wärmequellen vorliegen. Ist der Körper homogen und folglich k konstant, entsteht die *Laplace-Gleichung*

$$\boxed{-\Delta\theta = 0 \quad \text{in } \Omega.} \tag{1.18}$$

Um eine sinnvolle Aussage zur Lösbarkeit von (1.18) zu treffen, sind aus mathematischen und physikalischen Gründen *Randbedingungen* an θ auf $\partial\Omega$ zu stellen. Wird die Temperatur θ außen konstant auf θ_0 gehalten, spricht man von *Dirichlet-Randwerten* (auch *Randbedingung 1. Art* oder *wesentliche Randbedingung*). Es entsteht das sog. *Dirichlet-Problem*

$$\boxed{\begin{array}{ll} -\Delta\theta = 0 & \text{in } \Omega, \\ \theta = \theta_0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{array}} \quad (1.19)$$

Ist dagegen der Körper thermisch perfekt isoliert, findet kein Wärmefluss durch den Rand statt; es gilt also

$$\phi \cdot N = -k \frac{\partial\theta}{\partial N} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Diese Randbedingung heißt *Neumann-Randbedingung*, *natürliche Randbedingung* oder auch *Randbedingung 2. Art*. Statt (1.19) lautet das *Neumann-Problem* also

$$\boxed{\begin{array}{ll} -\Delta\theta = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\theta}{\partial N} = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{array}} \quad (1.20)$$

In einem realen, nicht perfekt isolierten Körper wird der Wärmefluss $\phi \cdot N$ auf $\partial\Omega$ proportional zur anliegenden Temperaturdifferenz $\theta - \theta_0$ sein. Folglich wird (1.18) durch die *Randbedingung der 3. Art* (*Robin-Randbedingung*)

$$\frac{\partial\theta}{\partial N} + \alpha(\theta - \theta_0) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

ergänzt. Die konstante oder von x abhängige Funktion α ist dabei aus physikalischen Gründen positiv.

Bemerkung 1.8 Die Laplace-Gleichung (1.18) macht deutlich, dass partielle Differentialgleichungen – wie auch gewöhnliche Differentialgleichungen – Randwerte und bei instationären Problemen zusätzlich Anfangswerte benötigen, um sinnvolle Aussagen zu Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu gewinnen. Der Einfachheit halber wurde dieser Punkt in den Beispielen 1.2 – 1.6 nicht angesprochen. Darüber hinaus sollte die Lösung stetig von den Daten des Problems abhängen. Dieser Problemkreis führte J. Hadamard (1865–1963) auf den Begriff der Wohlgestelltheit.

Definition 1.9 Eine partielle Differentialgleichung in $(0, T) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mit rechter Seite f , kurz $L(u) = f$, mit Randwerten $R(u) = g$ auf $\partial\Omega$ und ggf. Anfangswert $A(u) = u_0$ in $t = 0$ heißt *wohlgestellt im Sinne von Hadamard*, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

(1) Für alle (sinnvollen) Daten f, u_0, g besitzt die Gleichung

$$L(u) = f \quad \text{mit} \quad R(u) = g, \quad A(u) = u_0$$

mindestens eine Lösung u (**Existenz**).

(2) Zu jedem f, g und u_0 gibt es höchstens eine Lösung (**Eindeutigkeit**).

(3) Die Lösung $u = u(f, g, u_0)$ hängt stetig von den Daten f, g, u_0 ab, d.h., werden die Daten nur wenig gestört, ändert sich auch die Lösung nur wenig (**stetige Abhängigkeit, Stabilität**)

Die Forderungen (1) – (3) hängen entscheidend davon ab, in welchen Funktionenräumen die Daten f, g, u_0 und die Lösung u gefunden und abgeschätzt werden sollen. Zur Untersuchung bieten sich Funktionenräume stetiger und mehrmals stetig differenzierbarer Funktionen wie $C^0(\overline{\Omega})$, $C^k(\overline{\Omega})$ etc., aber auch Räume integrierbarer Funktionen wie $L^1(\Omega)$ und $L^2(\Omega)$ an.

Beispiel 1.10 (1) Die Transportgleichung $u_t + cu_x = 0$ besitzt zum Anfangswert $u(0, x) = u_0(x)$ die eindeutige Lösung

$$u(t, x) = u_0(x - ct).$$

Zum Nachweis der Wohlgestelltheit dieses Problems benutzen wir für u_0 den Raum der beschränkten C^1 -Funktionen

$$BC^1(\mathbb{R}) = \{u_0 \in C^1(\mathbb{R}) : u_0, u'_0 \text{ sind beschränkt}\}$$

mit der passenden Supremumsnorm

$$\|u_0\|_* = \max\{\|u_0\|_\infty, \|u'_0\|_\infty\};$$

dabei ist $\|u_0\|_\infty := \{\sup |u_0(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. Analog sei $BC^1(\mathbb{R}^2)$ mit Hilfe der Norm

$$\|u\|_{**} = \max(\|u\|_\infty, \|\partial_1 u\|_\infty, \|\partial_2 u\|_\infty)$$

definiert. Die triviale Abschätzung

$$\|u\|_{**} \leq \max(1, |c|) \|u_0\|_*$$

beweist dann auf Grund der Linearität der Transportgleichung die stetige Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert: Sind u_0 und u'_0 zwei Anfangswerte und u bzw. u' die zugehörigen Lösungen, so folgt

$$\|u - u'\|_{**} \leq \max(1, |c|) \|u_0 - u'_0\|_*.$$

(2) Jetzt werde die Transportgleichung mit der „Anfangsbedingung“

$$u(s, cs) = u_0(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

auf der sog. charakteristischen Kurve (s, cs) betrachtet. Man sieht sofort, dass die Gleichung $u_t + cu_x = 0$ nur lösbar ist, falls $u_0(s)$ konstant ist. Darüber hinaus gibt es unter dieser Voraussetzung unendlich viele Lösungen. Das Problem ist also nicht wohlgestellt!

Der Grund für den eklatanten Unterschied zwischen (1) und (2) wird in §4 bei der Behandlung der Charakteristikenmethode für quasilineare Gleichungen 1. Ordnung klar.

2 Die eindimensionale Wellengleichung

2.1 Das homogene Problem

Wir betrachten die homogene Wellengleichung ($c \in \mathbb{R}_+^*$)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (2.1)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x). \quad (2.2)$$

Analog zur Behandlung der Transportgleichung in Beispiel 1.1 werden neue Koordinaten eingeführt, um zu einer direkt lösbaren Gleichung zu kommen. Es sei

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

und

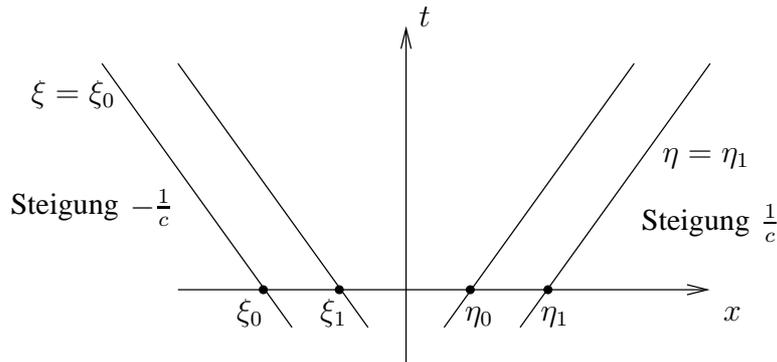


Abbildung 2.1: Geraden $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$.

$$v(\xi, \eta) = u(t, x),$$

so dass $\partial_t u + c \partial_x u = 2c v_\xi$ und $\partial_t u - c \partial_x u = -2c v_\eta$ folgen. Dann impliziert (2.1)

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x)u = -4c^2 v_{\xi\eta}, \quad (2.3)$$

also

$$v_{\xi\eta} = 0. \quad (2.4)$$

Folglich ist v_ξ von η unabhängig, und es gibt eine Funktion $f(\xi)$ mit $v_\xi(\xi, \eta) = f(\xi)$. Integration bzgl. ξ liefert

$$v(\xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} f(s) ds + G(\eta) =: F(\xi) + G(\eta)$$

als allgemeine Lösung von (2.4). Zusammenfassend erhält man mit noch unbekanntenen Funktionen F und G die Darstellung

$$\boxed{u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)} \quad (2.5)$$

als allgemeine Lösung von (2.1).

Der Anteil $G(x - ct)$ in (2.5) definiert eine mit der Geschwindigkeit $c > 0$ nach rechts laufende Welle, $F(x - ct)$ dagegen eine nach links laufende Welle. In beiden Fällen bleibt die Gestalt der Wellen erhalten. Damit u die Anfangsbedingungen

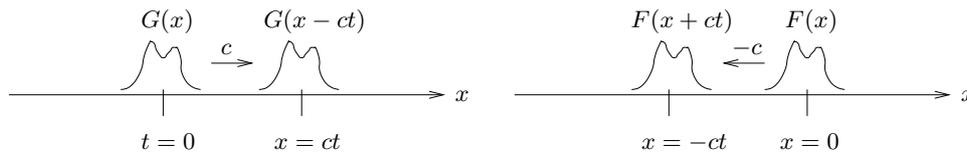


Abbildung 2.2: Nach rechts und links laufende Wellen

(2.2) erfüllt, muss

$$\begin{aligned} u_0 &= u(0, \cdot) = F + G \Rightarrow u'_0 = F' + G' \\ u_1 &= u_t(0, \cdot) = cF' - cG' \end{aligned}$$

gelten. Daraus ergibt sich eindeutig

$$F' = \frac{1}{2c}(cu'_0 + u_1), \quad G' = \frac{1}{2c}(cu'_0 - u_1),$$

also mit Integrationskonstanten $F_0, G_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s) ds + F_0, \\ G(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s) ds + G_0. \end{aligned}$$

Wegen $F + G = u_0$ ist automatisch $F_0 + G_0 = 0$. Somit können die Integrationskonstanten F_0, G_0 in (2.5) weggelassen werden, und (2.5) nimmt die Form

$$\boxed{u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds} \quad (2.6)$$

an. Eine Probe zeigt, dass (2.6) für $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ tatsächlich eine Lösung von (2.1) – (2.2) liefert.

Satz 2.1 Für beliebige Anfangswerte $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) &= u_0 \\ u_t(0, \cdot) &= u_1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$; diese Lösung ist durch (2.6) gegeben.

Beweis Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus dem Verfahren, nach dem zuvor die Lösung gewonnen wurde. ■

Bemerkung 2.2 (1) Sei $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein beliebiger Raum-Zeit-Punkt mit $t \neq 0$. Dann hängt die Lösung $u(t, x)$ nur von den Anfangswerten $u_0(y)$, $u_1(y)$ mit

$$y \in A(t, x) = [x - c|t|, x + c|t|]$$

ab. Das Intervall $A(t, x)$ heißt das *Abhängigkeitsgebiet* der Lösung u in (t, x) .

(2) Sei $\xi \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Raumpunkt. Dann beeinflussen die Anfangswerte $u_0(\xi)$, $u_1(\xi)$ das Verhalten des Lösung u nur in dem nach oben und unten offenen Doppelkegel

$$E(\xi) = \{(t, x) : \xi - c|t| \leq x \leq \xi + c|t|\},$$

dem sog. *Einflussgebiet*. Ist $u_1 \equiv 0$, so zeigt (2.6), dass

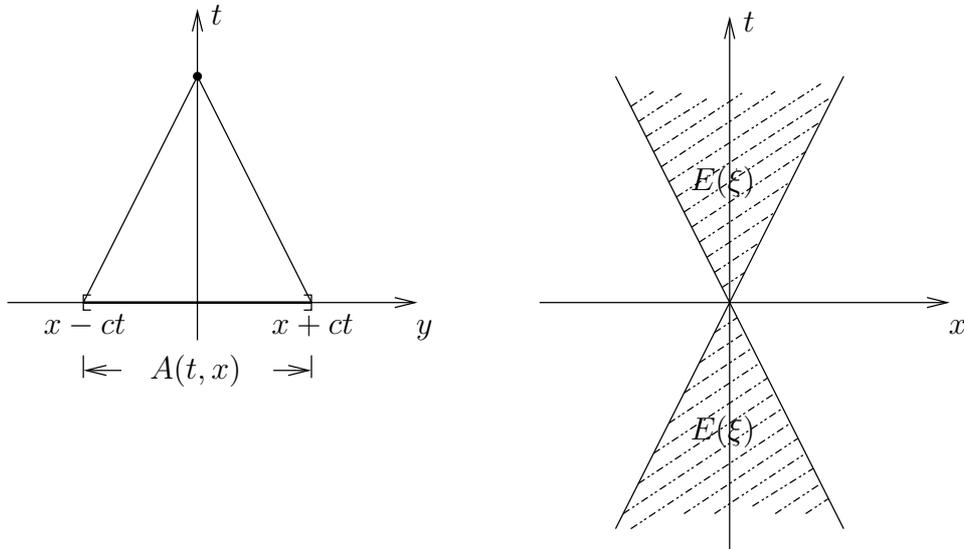


Abbildung 2.3: Abhängigkeits- und Einflussgebiet

$$\partial E(\xi) = \{(t, x) : \xi = x \pm c|t|\}$$

als Einflussgebiet genommen werden darf. Das Anfangssignal $u_0(\xi) \neq 0$ wird nur entlang den Charakteristiken $\xi = x \pm c|t|$, vgl. Abbildung 2.1 nach links und rechts transportiert. Im Fall $u_1 \neq 0$ ist i.a. der volle Kegel $E(\xi)$ das Einflussgebiet.

(3) Jetzt seien $x \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}$ fixiert. Dann liegt der Raum-Zeit-Punkt (t, x) für alle t mit

$$|t| > t_0 := \frac{|x - \xi|}{c}$$

im Einflussgebiet $E(\xi)$, d.h., das durch die Anfangswerte $u_0(\xi)$, $u_1(\xi)$ erzeugte Signal wird empfangen. Dieses Signal setzt in $t = \pm t_0$ scharf ein und wird im Fall $u_1 \equiv 0$ für $|t| > t_0$ nicht mehr wahrgenommen. Falls $u_1 \not\equiv 0$, wird u.U. für *alle* $|t| > t_0$ das Anfangssignal vernommen; ist $\int_{-\infty}^{\infty} u_1(s) ds \neq 0$, klingt das aufgenommene Signal für $|t| \rightarrow \infty$ nicht ab!

(4) Die Lösung (2.6) gestattet die einfachen punktweisen Abschätzungen

$$|u(t, x)| \leq \|u_0\|_{\infty} + |t| \|u_1\|_{\infty}$$

und

$$|u(t, x)| \leq \|u_0\|_{\infty} + \frac{1}{2c} \|u_1\|_1$$

unter Zuhilfenahme der sog. L^1 -Norm $\|u_1\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |u_1(s)| ds$. Zur Untersuchung der Wohlgestelltheit der Wellengleichung betrachten wir (2.7) nur auf einem endlichen Zeitintervall $[0, T]$. Ferner benutzen wir die Funktionenräume $BC^2(\mathbb{R})$ für u_0 und $BC^1(\mathbb{R})$ für u_1 mit den Normen

$$\|u_0\|_{BC^2} = \max(\|u_0\|_{\infty}, \|u_0'\|_{\infty}, \|u_0''\|_{\infty})$$

etc. sowie den Raum $BC^2([0, T] \times \mathbb{R})$ für die Lösung u . Offensichtlich gestattet (2.6) die einfache Abschätzung

$$\|u\|_{BC^2([0, T] \times \mathbb{R})} \leq K_T (\|u_0\|_{BC^2} + \|u_1\|_{BC^1})$$

mit einer von T abhängenden, jedoch von u_0, u_1 unabhängigen Konstanten $K_T > 0$. Die homogene Wellengleichung, d.h. mit $f = 0$, ist also auf endlichen Zeitintervallen bei den hier benutzten Normen wohlgestellt.

2.2 Das Anfangsrandwertproblem der Wellengleichung

Das *Anfangsrandwertproblem*

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \ell) \\ u(0, x) &= u_0(x) && \text{in } (0, \ell) \\ u_t(0, x) &= u_1(x) && \text{in } (0, \ell) \\ u(t, 0) = u(t, \ell) &= 0 && \text{für } t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.8}$$

auf dem Intervall $(0, \ell)$ kann durch geschickte Fortsetzung der Anfangswerte $u_0 \in C^2([0, \ell])$, $u_1 \in C^1([0, \ell])$ auf \mathbb{R} auf den Fall (2.7) zurückgeführt werden. Die Identität (2.6) liefert nur für (t, x) mit $x \pm ct \in (0, \ell)$ eine Lösung der Wellengleichung, d.h. für positive t nur im Dreiecksgebiet

$$t \leq \frac{x}{c} \quad \text{und} \quad t \leq \frac{\ell - x}{c}, \quad x \in (0, \ell),$$

s. Abbildung 2.4. Falls (2.6) z.B. in $x = 0$ für $t > 0$ gültig bleiben soll, muss auf Grund der Randbedingung (2.8)₄

$$\begin{aligned} 0 &= u(t, 0) = \frac{1}{2}(u_0(ct) + u_0(-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{+ct} u_1 ds \\ 0 &= u_t(t, 0) = \frac{c}{2}(u'_0(ct) - u'_0(-ct)) + \frac{1}{2}(u_1(ct) + u_1(-ct)) \end{aligned}$$

gelten. Diese Bedingungen können für $|t| < \frac{\ell}{c}$ erfüllt werden, wenn u_0 und u_1 ungerade von $(0, \ell)$ auf $(-\ell, 0)$ fortgesetzt werden. Die analoge Aussage trifft in $x = \ell$ zu, wenn u_0 und u_1 ungerade von $(0, \ell)$ auf $(\ell, 2\ell)$ fortgesetzt werden.

Insgesamt werden die auf $(-\ell, \ell)$ ungeraden Funktionen u_0 und u_1 2ℓ -periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt und anschließend in der Darstellung (2.6) zur Lösung des Anfangsrandwertproblems (2.8) benutzt. Sind die sich aus (2.8)₂ – (2.8)₄ ergebenden *Kompatibilitätsbedingungen*

$$u_0(0) = u_0(\ell) = 0, \quad u_1(0) = u_1(\ell) = 0$$

erfüllt, sind die oben konstruierten Fortsetzungen von u_0 und u_1 auf \mathbb{R} stetig differenzierbar. Dagegen ist u_0 i.a. nicht von der Klasse $C^2(\mathbb{R})$ wie in Satz 2.1 gefordert. Um $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \ell))$ zu erreichen, müssten die sich aus (2.8)₁ ergebenden weiteren Kompatibilitätsbedingungen

$$u_{0xx}(0) = u_{xx}(0, 0) = \frac{1}{c^2} u_{tt}(0, 0) = 0$$

und $u_{0xx}(\ell) = 0$ erfüllt sein.

Die Lösung des Problems (2.8) kann mit Hilfe von Fourier-Reihen (Methode der Trennung von Variablen) in vollkommen anderer Form gewonnen und dargestellt werden.

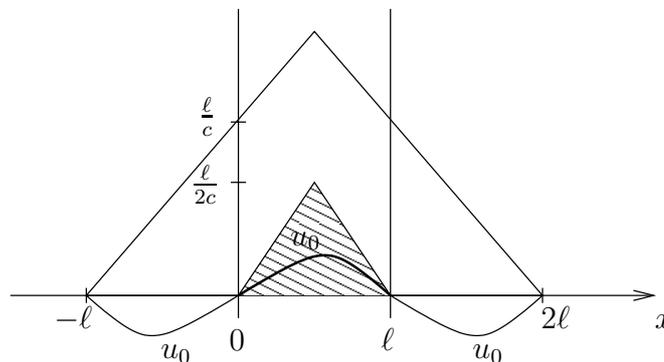


Abbildung 2.4: Fortsetzung des Anfangswertes u_0

Beispiel 2.3 Ein in $(0, \ell)$ eingespanntes Seil werde an der Stelle $x = \frac{\ell}{2}$ auf die Höhe $h > 0$ angehoben und anschließend losgelassen. Dann liefern die ungeraden und 2ℓ -periodischen Anfangswerte u_0, u_1 mit

$$u_0(x) = \frac{2}{\ell} \begin{cases} hx, & 0 \leq x < \ell/2 \\ h(\ell - x), & \ell/2 \leq x \leq \ell \end{cases}, \quad u_1(x) = 0$$

nach (2.6) die formale Lösung

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + ct) + u_0(x - ct)).$$

Da u_0 in $x = \ell/2$ nicht differenzierbar ist, wird die Lösung im Raum-Zeit-Gebiet $\mathbb{R} \times (0, \ell)$ Linien aufweisen, auf denen sie nicht differenzierbar ist. Für $0 \leq t \leq \min(\frac{x}{c}, \frac{\ell-x}{c})$, $x \in (0, \ell)$, erhält man

$$u(t, x) = h \begin{cases} x, & x + ct \leq \frac{\ell}{2} \\ \frac{\ell}{2} - ct, & x - ct \leq \frac{\ell}{2} \leq x + ct \\ \ell - x, & x - ct \geq \frac{\ell}{2} \end{cases}.$$

Die Unstetigkeitsstellen von u_x laufen von $x = \frac{\ell}{2}$ in $t = 0$ mit der Geschwin-

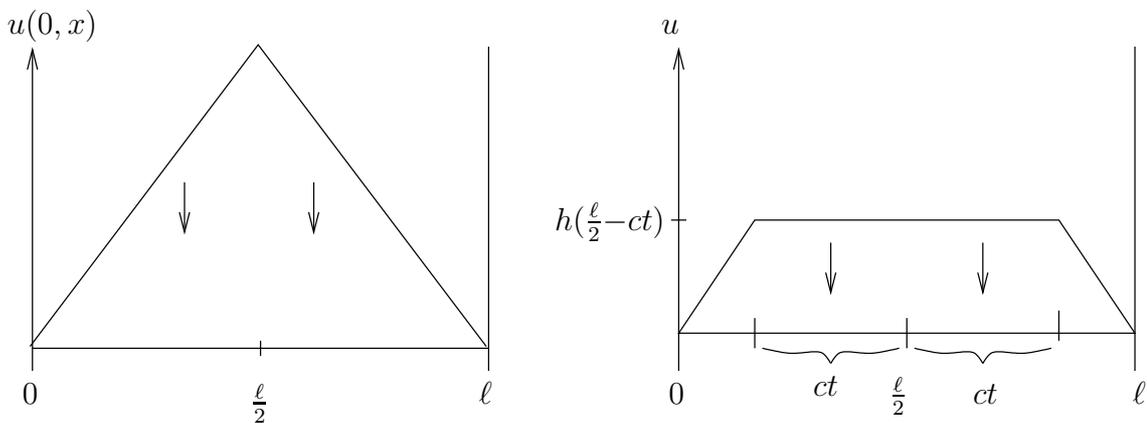


Abbildung 2.5: Das eingespannte Seil

digkeit $\pm c$ im Zeitintervall $[0, \frac{\ell}{2c}]$ nach 0 und nach ℓ und werden dort reflektiert, um sich für $t = \frac{\ell}{c}$ wieder in $x = \frac{\ell}{2}$ zu treffen. In $t = \frac{\ell}{2c}$ ist die potentielle Energie des elastischen Seils komplett in kinetische Energie umgewandelt ($u(\frac{\ell}{2c}, \cdot) \equiv 0$, $u_t(\frac{\ell}{2c}, \cdot) \neq 0$).

2.3 Die inhomogene Wellengleichung

Die Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t, x) \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

mit homogenen Randwerten $u_0 = u_1 = 0$ kann mit der Methode der Variablentransformation wie in §2.1 gelöst werden. Sei also

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct \quad \text{und} \quad v(\xi, \eta) = u(t, x).$$

Eine kleine Rechnung liefert, s. (2.3),

$$v_{\xi, \eta}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4c^2} F(\xi, \eta) \quad \text{mit} \quad F(\xi, \eta) = f(t, x).$$

Nach Integration bzgl. ξ' von η bis ξ erhält man

$$v_{\eta}(\xi, \eta) - v_{\eta}(\eta, \eta) = -\frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} F(\xi', \eta) d\xi', \quad (2.9)$$

wobei der Term $v_{\eta}(\eta, \eta)$ wegen

$$v_{\eta}(\eta, \eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} u\left(\frac{\xi - \eta}{2c}, \frac{\xi + \eta}{2}\right) \Big|_{\xi=\eta} = \left(-\frac{1}{2c} u_t + \frac{1}{2} u_x\right)(0, x) = \frac{1}{2} \left(u_{0x} - \frac{1}{c} u_1\right)(x) = 0$$

verschwindet. Anschließend integriert man (2.9) bzgl. η' von η bis ξ . Da $v(\xi, \xi) = u(0, x) = u_0(x)$ verschwindet, folgt die Gleichung

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} \left(\int_{\eta'}^{\xi} F(\xi', \eta') d\xi' \right) d\eta'. \quad (2.10)$$

Zur Rücktransformation auf (t, x) -Variablen werden (t', x') durch

$$\xi' = x' + ct', \quad \eta' = x' - ct'$$

eingeführt. Die Funktionaldeterminante dieser Transformation ist

$$\begin{vmatrix} \xi'_{x'} & \xi'_{t'} \\ \eta'_{x'} & \eta'_{t'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{vmatrix} = -2c.$$

Ferner besitzt das Integrationsgebiet $\eta \leq \eta' \leq \xi' \leq \xi$, also $x - ct \leq x' - ct' \leq x' + ct' \leq x + ct$, in (t', x') -Variablen die Dreiecksgestalt

$$x - c(t - t') \leq x' \leq x + c(t - t') \quad \text{mit} \quad 0 \leq t' \leq t.$$

Damit lautet (2.10) jetzt

$$u(t, x) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} f(t', x') dx' \right) dt'. \quad (2.11)$$

Man beachte, dass das Integrationsgebiet gerade das in Abbildung 2.3 gezeichnete gleichschenklige Dreieck mit Basis $A(t, x)$ ist. Damit (2.11) eine bzgl. x oder t zweimal stetig differenzierbare Funktion liefert, muss neben $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ noch die Existenz der partiellen Ableitung $f_x \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ gefordert werden.

Sind die Anfangswerte u_0, u_1 von Null verschieden, so kann auf Grund der Linearität der Wellengleichung zur soeben gewonnenen Lösung u die in §2.1 konstruierte Lösung mit Anfangswerten u_0, u_1 addiert werden, um eine Lösung des voll inhomogenen Problems zu finden (*Superpositionsprinzip*).

Satz 2.4 *Seien $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ und $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ mit $f_x \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ gegeben. Dann besitzt die inhomogene Wellengleichung*

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) &= u_0 && \text{in } \mathbb{R} \\ u_t(0, \cdot) &= u_1 && \text{in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$; diese Lösung hat die Gestalt

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2}(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds \\ &+ \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} f(t', x') dx' \right) dt' \end{aligned}$$

(Formel von d'Alembert).

3 Die Wellengleichung im \mathbb{R}^n

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u &= f && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0) &= u_0 && \text{für } t = 0 \\ u_t(0) &= u_1 && \text{für } t = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

wird durch die *Methode der sphärischen Mittel* auf eine modifizierte Wellengleichung im \mathbb{R}^1 zurückgeführt.

3.1 Die Methode der sphärischen Mittel

Definition 3.1 (1) Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$ die offene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt x ; dabei bezeichne $|\cdot|$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^n . Ist $x = 0$, schreiben wir auch kurz $B_r = B_r(0)$. Auf dem Rand

$$\partial B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$$

bezeichne do das Oberflächenmaß und ω_n die Oberfläche von ∂B_1 ; es gilt also

$$\omega_n = \int_{\partial B_1} 1 \, do = 2 \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

und folglich $\int_{\partial B_r} 1 \, do = \omega_n r^{n-1}$. Dabei ist Γ die Gamma-Funktion mit den speziellen Funktionswerten

$$\Gamma(k+1) = k!, \quad \Gamma(k+1/2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k} \sqrt{\pi}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ferner folgt für das n -dimensionale Volumen (Maß) der n -dimensionalen Kugel B_r

$$\int_{B_r} 1 \, dx = \frac{\omega_n}{n} r^n.$$

Es bezeichne $N = N(y) = \frac{y-x}{|y-x|}$ den äußeren Normalenvektor in $y \in \partial B_r(x)$ an $B_r(x)$.

(2) Für eine Funktion $h \in C^0(\mathbb{R}^n)$ sei

$$\begin{aligned} M_h(x, r) &:= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} h(y) \, do_y \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1} h(x + ry) \, do_y \end{aligned}$$

das *sphärische Mittel* der Funktion h über $\partial B_r(x)$, $r > 0$.

Offensichtlich kann man mit der zweiten Darstellung von $M_h(x, r)$ für $r \leq 0$ eine Fortsetzung von $M_h(x, r)$ für negative r definieren, und es gilt

$$\begin{aligned} M_h(x, r) &= M_h(x, -r), \\ M_h(x, r) &\rightarrow M_h(x, 0) = h(x) \quad \text{für } r \rightarrow 0 \\ h \in C^k(\mathbb{R}^n) &\Rightarrow M_h \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Lemma 3.2 Für $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gilt die Gleichung von Darboux

$$\boxed{(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r) M_h(x, r) = \Delta_x M_h(x, r)}. \quad (3.3)$$

mit den „Anfangswerten“

$$M_h(x, 0) = h(x), \quad \partial_r M_h(x, 0) = 0. \quad (3.4)$$

Beweis Da $M_h(x, r)$ in r stetig differenzierbar und gerade ist, muss $\partial_r M_h(x, 0) = 0$ gelten; die Eigenschaft $M_h(x, 0) = h(x)$ folgt aus der Stetigkeit von h , s. (3.2).

Zum Beweis der Formel (3.3) leiten wir zuerst eine für spätere Anwendungen wichtige Beziehung zwischen Volumen- und Oberflächenintegralen her. Der Gauß'sche Satz liefert die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} \Delta h(z) dz &= \int_{B_r} \Delta_z h(x+z) dz \\ &= \int_{\partial B_r} N \cdot \nabla_y h(x+y) d\omega_y \\ &= r^{n-1} \int_{\partial B_1} N \cdot \nabla h(x+ry) d\omega_y \\ &= r^{n-1} \int_{\partial B_1} \partial_r h(x+ry) d\omega_y \\ &= r^{n-1} \partial_r \int_{\partial B_1} h(x+ry) d\omega_y, \end{aligned}$$

also die Identität

$$\int_{B_r(x)} \Delta h(z) dz = r^{n-1} \partial_r \left(\frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r} h d\omega \right). \quad (3.5)$$

Mit anderen Worten gilt – nach Einführung von Polarkoordinaten für $z \in B_r$ –

$$\begin{aligned} \partial_r M_h(x, r) &= r^{1-n} \int_0^r \rho^{n-1} \Delta_x \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1} h(x+\rho y) d\omega_y \right) d\rho \\ &= r^{1-n} \int_0^r \rho^{n-1} \Delta_x M_h(x, \rho) d\rho. \end{aligned}$$

Eine weitere Differentiation nach r liefert

$$\partial_r^2 M_h(x, r) = \frac{1-n}{r} \partial_r M_h(x, r) + \Delta_x M_h(x, r)$$

und damit die Behauptung. ■

Lemma 3.3 Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Wellengleichung (3.1) mit $f \equiv 0$ und Anfangswerten u_0, u_1 und sei

$$M_u(x, r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1} u(t, x + ry) \, do_y.$$

Dann ist M_u zweimal stetig partiell differenzierbar bzgl. r und t und genügt der Euler-Poisson-Darboux-Gleichung

$$\partial_t^2 M_u = c^2 \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r \right) M_u \quad (3.6)$$

mit den Anfangswerten

$$M_u(x, r, 0) = M_{u_0}(x, r), \quad \partial_t M_u(x, r, 0) = M_{u_1}(x, r). \quad (3.7)$$

Ferner gilt $M_u(x, 0, t) = u(t, x)$.

Beweis Mit Lemma 3.2 folgt sofort aus (3.1), $f \equiv 0$,

$$\begin{aligned} \partial_t^2 M_u(x, r, t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1} \partial_t^2 u(t, x + ry) \, do_y \\ &= \frac{c^2}{\omega_n} \int_{\partial B_1} \Delta_x u(t, x + ry) \, do_y, \end{aligned}$$

also $\partial_t^2 M_u = c^2 \Delta_x M_u = c^2 \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r \right) M_u$. Die Identitäten (3.7) sind trivial. ■

3.2 Die homogene Wellengleichung im \mathbb{R}^3

Für $n = 3$ läßt sich (3.6) zu

$$\partial_t^2 M_u = c^2 \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) M_u = \frac{1}{r} c^2 \partial_r^2 (r M_u),$$

also zu

$$\partial_t^2 (r M_u) = c^2 \partial_r^2 (r M_u), \quad (3.8)$$

umschreiben. Für festes $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt $r M_u$ folglich eine eindimensionale Wellengleichung bzgl. (t, r) mit den Anfangswerten

$$r M_u|_{t=0} = r M_{u_0}, \quad \partial_t (r M_u)|_{t=0} = r M_{u_1}. \quad (3.9)$$

Nach Satz 2.1 besitzt (3.8) – (3.9) die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} rM_u(x, r, t) &= \frac{1}{2}((r+ct)M_{u_0}(x, r+ct) + (r-ct)M_{u_0}(x, r-ct)) \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} sM_{u_1}(x, s)ds. \end{aligned}$$

Da $M_{u_1}(x, \cdot)$ gerade ist, verschwindet das Integral $\int_{ct-r}^{r-ct} sM_{u_1}(x, s)ds$, und nach Division durch $r \neq 0$ erhält man

$$\begin{aligned} M_u(x, r, t) &= \frac{1}{2r}((ct+r)M_{u_0}(x, ct+r) - (ct-r)M_{u_0}(x, ct-r)) \\ &\quad + \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{ct+r} sM_{u_1}(x, s)ds. \end{aligned}$$

Jetzt kann der Grenzübergang $r \rightarrow 0$ durchgeführt werden, indem der erste Term auf der rechten Seite als Differenzenquotient in r aufgefasst wird. Für $r \rightarrow 0$ folgt mit (3.2)₂

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \partial_r((ct+r)M_{u_0}(x, ct+r))|_{r=0} + tM_{u_1}(x, ct) \\ &= \partial_t(tM_{u_0}(x, ct)) + tM_{u_1}(x, ct). \end{aligned}$$

Satz 3.4 Für Anfangswerte $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ besitzt die homogene Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$; diese ist durch die Kirchhoff'sche Formel

$$\begin{aligned} u(t, x) &= tM_{u_1}(x, ct) + \partial_t(tM_{u_0}(x, ct)) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x)} u_1 do + \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x)} u_0 do \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

gegeben.

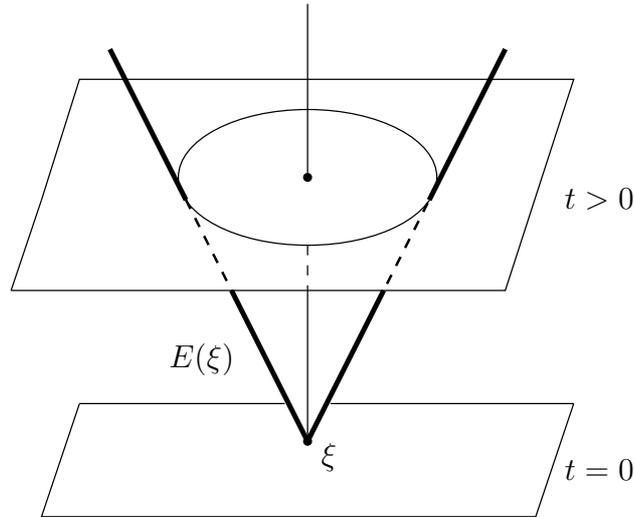
Beweis Die obige Herleitung führt eindeutig zur Darstellung (3.10). Der Beweis, dass (3.10) eine Lösung liefert, benutzt die auf (3.3) basierende Gleichung

$$\Delta_x(tM_h)(x, t) = t\Delta M_h = t(\partial_t^2 + \frac{2}{t}\partial_t)M_h = \partial_t^2(tM_h)$$

sowie $\partial_t M_h(x, 0) = 0$ für $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$. ■

Bemerkung 3.5 (1) Da in (3.10) nur Randintegrale über $\partial B_{ct}(x)$ auftreten, ist das Einflussgebiet $E(\xi)$ eines Punktes $\xi \in \mathbb{R}^3$ der Rand eines Doppelkegels:

$$E(\xi) = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : |x - \xi| = ct\}.$$

Abbildung 3.1: Das Einflussgebiet $E(\xi)$ der Wellengleichung im \mathbb{R}^3

Für eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichne

$$\text{supp } h = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \neq 0\}}$$

den Träger (support) von h . Nun gelte für die Anfangswerte u_0, u_1 die Beziehung

$$\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 \subset \overline{B_\varepsilon(\xi)}, \quad \varepsilon > 0;$$

d.h., das Anfangssignal ist in der Kugel $\overline{B_\varepsilon(\xi)}$ konzentriert. Dann setzt für einen Punkt $x \notin \overline{B_\varepsilon(\xi)}$ das Signal scharf zum Zeitpunkt

$$t_0 = \frac{1}{c} \text{dist}(x, \overline{B_\varepsilon(\xi)}) = \frac{1}{c} (|x - \xi| - \varepsilon)$$

ein und endet zum Zeitpunkt

$$t_1 = \frac{1}{c} (|x - \xi| + \varepsilon)$$

(*Huygens'sches Prinzip*).

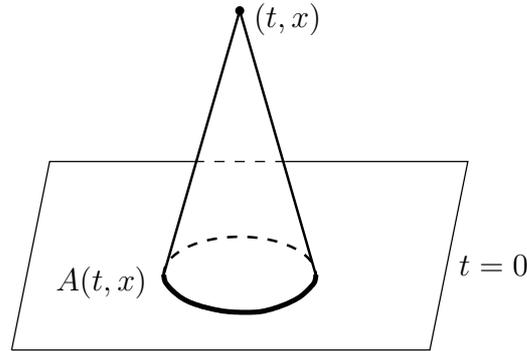
- (2) Analog zu (1) sieht man, dass $u(t, x)$ nur von den Daten aus dem Abhängigkeitsgebiet

$$A(t, x) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y - x| = c|t|\}$$

bestimmt wird.

- (3) Eine andere Darstellung der Lösung (3.10) ist

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{\partial B_{ct}(x)} (tu_1(y) + u_0(y) + (y - x) \cdot \nabla u_0(y)) do_y. \quad (3.11)$$

Abbildung 3.2: Das Abhängigkeitsgebiet $A(t, x)$

Aus den Eigenschaften $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ folgt also *nur* $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, d.h., man verliert eine Differenzierbarkeitsordnung von $t = 0$ zu $t > 0$. Der physikalische Grund liegt in der „Fokussierung“ von Störungen in den Anfangswerten für wachsende $t > 0$. Also sind $u(T, \cdot)$ und $u_t(T, \cdot)$ keine zulässigen Anfangswerte für die Wellengleichung auf $[T, \infty) \times \mathbb{R}^3$, $T > 0$, im Sinne von Satz 3.4, obwohl die Lösung u für alle $t \in \mathbb{R}$ in C^2 existiert. Der mathematische Hintergrund ist die falsche Wahl der Funktionenräume. Die Räume $L^2(\mathbb{R}^3)$, $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ sind der Wellengleichung besser als die Räume C^k angepasst.

- (4) Es gelte $\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 \subset B_r(0)$. Dann folgt aus (3.11) für beliebiges $x \in \mathbb{R}^3$ und für große $t > 0$ die Abschätzung

$$|u(t, x)| \leq \frac{M}{t^2} (t \|u_1\|_\infty + \|u_0\|_\infty + ct \|\nabla u_0\|_\infty) = O\left(\frac{1}{t}\right),$$

wobei die Konstante $M = \frac{1}{4\pi c^2} \cdot (\text{Oberflächenmaß von } \partial B_{ct}(x) \cap B_r(0))$ gleichmäßig durch Cr^2 beschränkt ist. Die Signalstärke $|u(t, x)|$ klingt also – unabhängig von der Lage von x – wie $\frac{1}{t}$ ab.

3.3 Der Fall $n = 2$ und die Abstiegs Methode von Hadamard

Sei $u(t, x) = u(t, x_1, x_2)$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung im \mathbb{R}^2 . Im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall gestattet die Euler-Poisson-Darboux-Gleichung (vgl. (3.6) in \mathbb{R}^3)

$$\partial_t^2 M_u = c^2 \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) M_u$$

jetzt keine einfache Lösung. Stattdessen wird bei der Abstiegs Methode von Hadamard im 2D-Problem künstlich eine x_3 -Variable eingeführt, die anschließend auf 0 gesetzt wird. Dementsprechend betrachtet man

$$v(t, x_1, x_2, x_3) := u(t, x_1, x_2)$$

als Lösung der 3D-Wellengleichung $v_{tt} - c^2 \Delta v = 0$ mit Anfangswerten

$$v(0, x_1, x_2, x_3) = u_0(x_1, x_2), \quad v_t(0, x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2). \quad (3.12)$$

Nach Satz 3.4 ist die eindeutige Lösung $v(t, x_1, x_2, x_3)$ zu den Anfangswerten (3.12) durch (3.10) gegeben. Für $x_3 = 0$ folgt mit der Notation $x^0 = (x_1, x_2, 0)$

$$\begin{aligned} u(t, x_1, x_2) &= v(t, x_1, x_2, 0) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x^0)} u_1(y_1, y_2) do_y + \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x^0)} u_0(y_1, y_2) do_y \right), \end{aligned}$$

wobei die Oberflächenintegrale $\int_{\partial B_{ct}(x^0)} (\dots) do_y$ über den Rand der dreidimensionalen Kugel $B_{ct}(x^0)$ laufen. Als konkrete Parametrisierung der oberen Hälfte $\partial B_{ct}^+(x^0) = \{y \in \partial B_{ct}(x^0) : y_3 > 0\}$ benutzen wir

$$y_3 = y_3(y_1, y_2) = \sqrt{c^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}$$

für alle $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < c^2 t^2$. Für das Oberflächenelement do_y berechnet man den Term

$$1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2} \right)^2 = \frac{c^2 t^2}{c^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}.$$

Damit erhält man z.B.

$$\begin{aligned} &\int_{\partial B_{ct}^+(x^0)} u_1(y_1, y_2) do_y \\ &= \int_{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < c^2 t^2} u_1(y_1, y_2) \frac{c|t|}{\sqrt{c^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} dy_1 dy_2, \end{aligned}$$

bzw. in der üblichen zweidimensionalen Notation

$$c|t| \int_{B_{ct}(x)} \frac{u_1(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x - y|^2}} dy$$

mit $y = (y_1, y_2) \in B_{ct}(x) \subset \mathbb{R}^2$. Analog werden die „untere Hälfte“ $\partial B_{ct}^-(x^0) \subset \mathbb{R}^3$ und die Terme mit u_0 behandelt. Schließlich liefert Satz 3.4 die folgende Aussage:

Satz 3.6 Für Daten $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ besitzt die homogene Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ u(0) &= u_0 && \text{für } t = 0 \\ u_t(0) &= u_1 && \text{für } t = 0 \end{aligned}$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \frac{\operatorname{sgn} t}{2\pi c} \int_{B_{ct}(x)} \frac{u_1(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x - y|^2}} dy \\
 &+ \partial_t \left(\frac{\operatorname{sgn} t}{2\pi c} \int_{B_{ct}(x)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x - y|^2}} dy \right).
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Beweis Für die in (3.12) definierten, von $x_3 \in \mathbb{R}$ unabhängigen Anfangswerte liefert Satz 3.4 wegen der Eindeutigkeitsaussage eine ebenfalls von x_3 unabhängige Lösung v . Deshalb ist die durch (3.13) gegebene Funktion u tatsächlich eine Lösung der $2D$ -Wellengleichung.

Ist $u(t, x_1, x_2)$ eine Lösung der $2D$ -Wellengleichung mit verschwindenden Anfangswerten, so ist $v(t, x_1, x_2, x_3) = u(t, x_1, x_2)$ eine Lösung der $3D$ -Wellengleichung mit $v(0) = v_t(0) = 0$. Dann beweist Satz 3.4 die Eindeutigkeit $u = v = 0$. ■

Bemerkung 3.7 (1) Die in (3.13) auftretenden zweidimensionalen Integrale führen zu den Aussagen

$$\begin{aligned}
 A(t, x) &= \overline{B_{ct}(x)}, \\
 E(\xi) &= \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : |x - \xi| \leq c|t|\}.
 \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall sind $A(t, x)$ bzw. $E(\xi)$ jetzt eine „gefüllte“ Kreisscheibe bzw. ein „gefüllter“ Kegel. Es gilt also nicht das Huygens'sche Prinzip. Sind $u_0, u_1 \in C_0^\infty(B_r(0))$, setzt für $x \notin \overline{B_r(0)}$ das Signal in $t = \frac{1}{c}(|x| - r)$ scharf ein und endet i.a. nie! Allerdings klingt das Signal im Punkt x mindestens wie $\frac{1}{t}$, im Fall $u_1 \equiv 0$ sogar wie $\frac{1}{t^2}$ für $t \rightarrow \infty$ ab.

(2) Aus $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ folgt i.a. nicht $u(t, \cdot) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Auf Grund des Terms $(c^2 t^2 - |x - y|^2)^{-1/2}$ in (3.13) verliert man etwa die Ordnung $\frac{1}{2}$ an Regularität.

Ausblick 3.8 Die Fälle $n = 5, n = 7$ etc. ungerader Dimension werden analog zum Fall $n = 3$ behandelt. In allen ungeraden Raumdimensionen außer $n = 1$ gilt das Huygens'sche Prinzip. Die Lösungen der homogenen Wellengleichung in geraden Raumdimensionen $n = 2k$ erhält man mit der Hadamard'schen Abstiegs-methode aus dem Fall $n = 2k + 1$. Für $n = 2k$ gilt das Huygens'sche Prinzip nicht. In jeder Raumdimension n verliert man von $t = 0$ zu $t > 0$ etwa $\frac{n-1}{2}$ Ordnungen an Regularität.

3.4 Die inhomogene Wellengleichung und Duhamel's Prinzip

Die inhomogene Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u &= f(t, x) && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0) &= 0 && \text{für } t = 0 \\ u_t(0) &= 0 && \text{für } t = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

werde nur für die trivialen Anfangswerte $u_0 = u_1 = 0$ betrachtet, da die Lösung für den Fall $f \equiv 0$ mit beliebigen Anfangswerten nach §§3.2 – 3.3 bekannt ist und da für die lineare Wellengleichung das Superpositionsprinzip gilt. Zur Lösung von (3.14) benutzen wir eine Methode, die verwandt ist zur Formel der *Variation der Konstanten* aus der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung. Für fest gewähltes, aber beliebiges $s \geq 0$ sei $U = U(s, t, x)$ die Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - c^2 \Delta) U(s, t, x) &= 0 && \text{für } t > s, x \in \mathbb{R}^n \\ U(s, s, x) &= 0 && \text{für } t = s, x \in \mathbb{R}^n \\ U_t(s, s, x) &= f(s, x) && \text{für } t = s, x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.15)$$

und sei

$$u(t, x) := \int_0^t U(s, t, x) ds.$$

Satz 3.9 Sei f eine glatte, d.h. unendlich oft stetig differenzierbare Funktion auf $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, und sei für jedes $s \geq 0$ die Funktion $U(s, t, x)$ die Lösung der homogenen Wellengleichung (3.15). Dann ist

$$u(t, x) = \int_0^t U(s, t, x) ds \quad (3.16)$$

die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen Wellengleichung (3.14).

Beweis Für $f \in C^\infty$ implizieren die expliziten Lösungsformeln (3.10), falls $n = 3$, bzw. (3.13), falls $n = 2$, dass $U(s, t, x)$ zweimal stetig partiell differenzierbar bzgl. t, x ist. Die Probleme der Regularität und sogar der Integrierbarkeit von $U(s, t, x)$ bzgl. $s \in [0, t]$ sollen hier – außer für $n = 3$ in Korollar 3.10 – nicht weiter betrachtet werden. Aus (3.16) folgt $u(0, x) = 0$ sowie

$$u_t(t, x) = \underbrace{U(t, t, x)}_{=0} + \int_0^t U_t(s, t, x) ds,$$

also $u_t(0, x) = 0$. Eine weitere Differentiation nach t liefert wegen (3.15)

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= U_t(t, t, x) + \int_0^t U_{tt}(s, t, x) ds \\ &= f(t, x) + c^2 \Delta \int_0^t U(s, t, x) ds. \end{aligned}$$

Also löst u die Gleichung (3.14). Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus den Eindeutigkeitsaussagen der Sätze 3.4 bzw. 3.6. Der allgemeine Fall $n \geq 4$ soll hier nicht weiter untersucht werden. ■

Im Fall $n = 3$ liefert die Lösungsformel (3.10) mit Anfangswert $u_0 = 0$, $u_1 = f(s, \cdot)$ in $t = s$ (für alle $s \geq 0$) die folgende konkrete Lösungsformel für (3.14).

Korollar 3.10 Für $n = 3$ ist

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t \frac{1}{t-s} \left(\int_{\partial B_{c(t-s)}(x)} f(s, y) \, d\sigma(y) \right) ds \quad (3.17)$$

die eindeutige Lösung der inhomogenen Wellengleichung (3.14). Insbesondere wird das Abhängigkeitsgebiet $A(t, x)$ von u in (t, x) durch den Rand eines Kegels im \mathbb{R}^4 , nämlich durch

$$A(t, x) = \{(s, y) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 : |y - x| = c|t - s|, 0 \leq s \leq t\}$$

beschrieben.

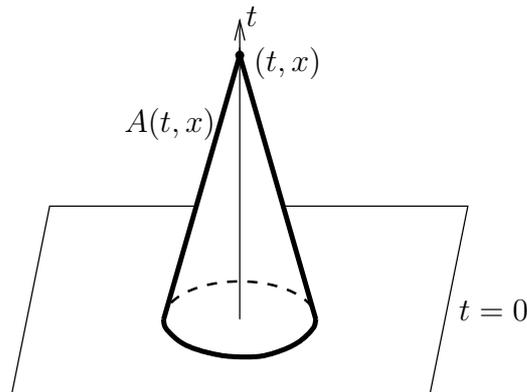


Abbildung 3.3: Das Abhängigkeitsgebiet $A(t, x)$ für die inhomogene Wellengleichung im \mathbb{R}^3

Bemerkung 3.11 (1) Im Fall $n = 3$ genügt die Funktion

$$U(s, t, x) = \frac{1}{4\pi c^2(t-s)} \int_{\partial B_{c(t-s)}(x)} f(s, y) \, d\sigma(y)$$

der Abschätzung $|U(s, t, x)| \leq (t-s) \|f\|_\infty$. Deshalb ist das äußere Integral in (3.17) bzgl. $s \in (0, t)$ nicht singulär, sondern ein gewöhnliches Riemann-Integral. Die Voraussetzung $f \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ impliziert bereits $u \in C^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$.

- (2) Bei verschwindenden Anfangswerten sei u die durch eine äußere Kraft f mit $\text{supp } f \subset [r, r] \times \overline{B_r(0)}$ angeregte Welle. Nach (3.17) setzt für $n = 3$ das Signal in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_r(0)}$ irgendwann ein und endet nach einem Zeitintervall der Länge $2r/c$ scharf. Dieses Signal wird allein durch die Funktionswerte von f , d.h. ohne durch f_t und ∇f gegebene Informationen bestimmt.

Im Fall $n = 2$ setzt das Signal irgendwann ein und klingt für $t \rightarrow \infty$ ab. Es hängt ebenfalls nur von f ab, s. (3.13).

Für $n \geq 4$ setzt das Signal scharf ein und endet scharf, falls n ungerade ist, bzw. klingt für $t \rightarrow \infty$ ab, falls n gerade ist. Die Form des Signals hängt nicht nur von den Funktionswerten $f(t, x)$ ab, sondern auch von ∇f ($n = 4, 5$) und von u.U. höheren Ableitungen von f ab; das Signal wird also „verzerrt“.

4 Die Laplace-Gleichung

4.1 Darstellungsformeln

Wir betrachten die allgemeine *Poisson-Gleichung*

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ist $f = 0$ in Ω , so heißt die obige Gleichung auch *Laplace-Gleichung*, und u heißt *harmonisch*.

Lemma 4.1 *Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ radialsymmetrisch, d.h. $u(x) = v(r)$, $r = |x|$, mit einer Funktion $v : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, gilt*

$$\boxed{\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{n-1}{r} \partial_r u}. \quad (4.1)$$

Der Einfachheit halber schreibt man auch $u(x) = u(r)$ und $\Delta u = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r$. Der Beweis von (4.1) ergibt sich durch Nachrechnen.

Gesucht werden vorerst alle radialsymmetrischen harmonischen Funktionen u auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Nach (4.1) gilt für $r > 0$

$$0 = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r,$$

so dass $v = u_r$ die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung $v_r = -\frac{n-1}{r} v$ erfüllt. Also ist

$$u_r(r) = c_0 r^{1-n}$$

und folglich

$$u(r) = c_1 + c_0 \begin{cases} \log r, & n = 2 \\ \frac{1}{2-n} r^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}.$$

Mit $c_1 = 0$ und einer speziellen Wahl von c_0 gelangen wir zur folgenden Definition.

Definition 4.2 Es bezeichne $\omega_n = |\partial B_1|$ das Oberflächenmaß der n -dimensionalen Einheitskugel, vgl. Definition 3.1. Dann heißt

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n}, & n \geq 3 \\ -\frac{1}{2\pi} \log r, & n = 2 \end{cases}$$

die *Fundamentallösung* zum Laplace-Operator $-\Delta$.

Satz 4.3 (Greensche Formel) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, so dass partielle Integration nach dem Satz von Gauß erlaubt ist. Dann gilt für $u \in C^2(\bar{\Omega})$ und für alle $x \in \Omega$ die Integraldarstellung*

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} E(x-y)(-\Delta u)(y) dy \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial N}(y) E(x-y) - u(y) \frac{\partial}{\partial N_y} E(x-y) \right) d\sigma_y. \end{aligned} \quad (4.2)$$

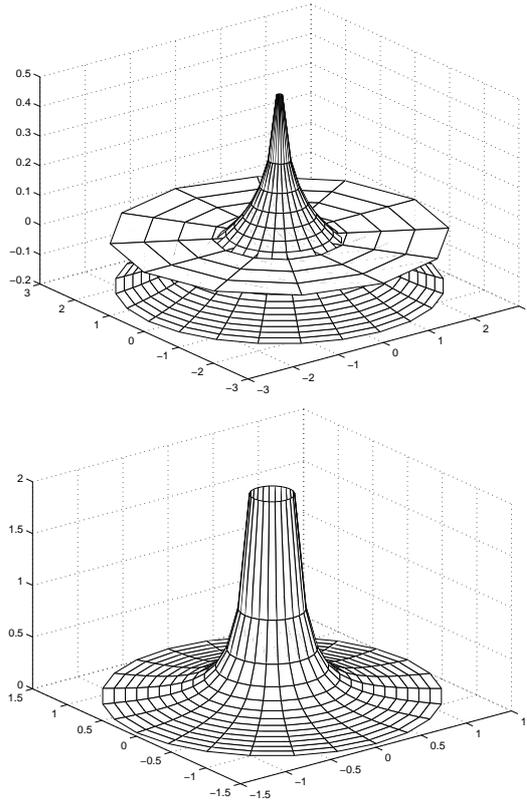


Abbildung 4.1: Die Fundamentallösungen $E(x) = \frac{1}{4\pi r}$ ($n = 3$) und $E(x) = -\frac{1}{2\pi} \log r$ ($n = 2$)

Dabei bedeutet $u \in C^2(\overline{\Omega})$, dass u in $C^2(\Omega)$ liegt und u sowie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von u auf Ω zu (beschränkten) stetigen Funktionen auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar sind. Damit sind alle Integrale in (4.2) wohldefiniert. Der Ausdruck $\partial/\partial N_y$ deutet an, dass die Normalableitung auf $\partial\Omega$ bzgl. der Variablen y und nicht bzgl. x in $E(x - y)$ berechnet wird. Bevor wir zum Beweis von Satz 4.3 kommen, geben wir drei wichtige Folgerungen an.

Korollar 4.4 (1) Für jede Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger gilt

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x - y)(-\Delta u)(y) dy = E * (-\Delta u)(x). \quad (4.3)$$

(2) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand und $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ harmonisch, gilt

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial N} u(y) E(x - y) - u(y) \frac{\partial}{\partial N_y} E(x - y) \right) do_y. \quad (4.4)$$

- (3) Jede harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega)$ ist unendlich oft stetig partiell differenzierbar und sogar reell analytisch in x_1, \dots, x_n .

Beweis von Korollar 4.4

- (1) Wählt man ein glatt berandetes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, welches den Träger $\text{supp } u$ enthält, folgt (4.3) aus (4.2), denn die Randintegrale über $\partial\Omega$ verschwinden.
- (2) (4.4) folgt sofort aus (4.2), falls $u \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt. Ist jedoch nur $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, betrachtet man die Darstellung (4.2) auf einer Folge von beschränkten, glattberandeten Gebieten (Ω_k) mit

$$\Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \dots \subset \Omega,$$

die das Gebiet Ω für $k \rightarrow \infty$ in einem gewissen Sinne ($\Omega_k \rightarrow \Omega$) ausschöpfen. Da (4.2) auf Ω_k gilt und partielle Ableitungen zweiter Ordnung in (4.2) für die harmonische Funktion u nicht benötigt werden, folgt (4.4) für $k \rightarrow \infty$. Auf weitere Details dieses Approximationsarguments soll hier nicht eingegangen werden.

- (3) Für $x_0 \in \Omega$ mit $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ benutze man die Integraldarstellung (4.4) in der Form

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x_0)} \left(\frac{\partial u}{\partial N} E(x-y) - u \frac{\partial}{\partial N_y} E(x-y) \right) do_y$$

für $x \in B_r(x_0)$. Da $E(x-y)$ und $\frac{\partial}{\partial N_y} E(x-y)$ für $y \in \partial B_r(x_0)$ beliebig oft bzgl. x partiell differenzierbar und sogar reell analytisch sind, ist auch $u(x)$ glatt und sogar reell analytisch.

Beweis von Satz 4.3 Der Beweis beginnt mit dem Integral $\int E(x-y) \Delta u(y) dy$ und zweifacher partieller Integration. Da $E(x-y)$ jedoch für $y \rightarrow x$ singular wird, wird zuvor die Kugel $B_\varepsilon(x)$ aus Ω herausgeschnitten. Auf dem Integrationsgebiet $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ erhält man mit zweifacher partieller Integration

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} E(x-y) \Delta u(y) dy \\ &= \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} \Delta_y E(x-y) u(y) dy \\ & \quad + \left(\int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \right) \left(E(x-y) \frac{\partial u}{\partial N} - \frac{\partial}{\partial N_y} E(x-y) u \right) do_y. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Da $\Delta_y E(x-y) = 0$ für $x \neq y$ gilt, verschwindet das erste Integral auf der rechten Seite. Für den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0+$ beachte man für $y \in \partial B_\varepsilon(x)$, also $|y-x| = \varepsilon$, die Wachstumsabschätzungen

$$|E(x-y)| = O(\varepsilon^{2-n}) \text{ für } n \geq 3, \quad |E(x-y)| = O(|\log \varepsilon|) \text{ für } n = 2$$

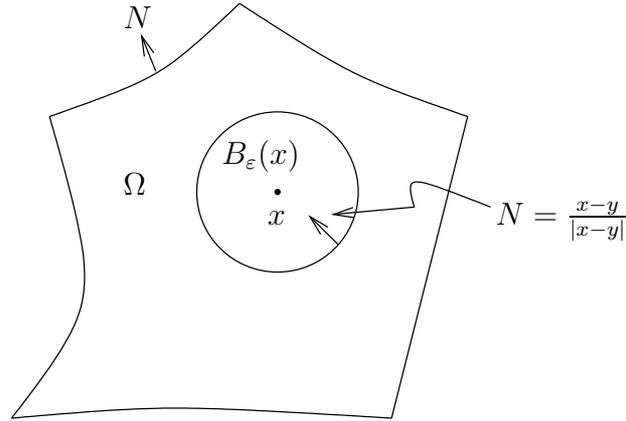


Abbildung 4.2: Zum Beweis von Satz 4.3

sowie $|\partial B_\varepsilon(x)| = \omega_n \varepsilon^{n-1}$. Wegen $u \in C^1(\Omega)$ folgt damit

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial N} d\sigma_y \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Im zweiten Randintegral über $\partial B_\varepsilon(x)$, wo $N_y = \frac{x-y}{|x-y|}$ gilt, beachte man die Identität

$$\frac{\partial}{\partial N_y} E(x-y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{x-y}{|x-y|^n} \cdot \frac{x-y}{|x-y|} = \frac{1}{\omega_n} \varepsilon^{1-n} = \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|}.$$

Deshalb liefert die Stetigkeit von u in x die entscheidende Konvergenzaussage

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial N_y} E(x-y) u(y) d\sigma_y = \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) d\sigma_y \rightarrow u(x)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0+$. Schließlich konvergiert $\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} E(x-y) \Delta u(y) dy$ wegen der Beschränktheit von Δu auf $\bar{\Omega}$ und der lokalen Integrierbarkeit der Singularität $|x-y|^{2-n}$ im \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) bzw. $\log|x-y|$ im \mathbb{R}^2 für $\varepsilon \rightarrow 0+$ gegen das entsprechende Integral auf Ω . Somit ist das Verhalten aller Integrale in (4.5) für $\varepsilon \rightarrow 0+$ geklärt und (4.2) bewiesen. ■

Da die Randintegrale in (4.2) harmonische Funktionen in x darstellen, ist es nahe liegend, das Poisson-Problem $-\Delta u = f$ für eine stetige Funktion f mittels des Faltungsintegrals $E * (-\Delta u) = E * f$ zu lösen, vgl. (4.3). Während die Singularitäten (für $y \sim x$) in den Integralen

$$\int_{\Omega} E(x-y) f(y) dy \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} \nabla_x E(x-y) f(y) dy$$

für jedes $f \in C^0(\bar{\Omega})$ noch integrierbar sind, ist die Singularität $|\partial_i \partial_j E(x-y)| \approx \frac{1}{|x-y|^m}$, $1 \leq i, j \leq n$, nicht mehr integrierbar. Tatsächlich gibt es *stetige* Funktionen

f , so dass $E * f$ nicht zweimal partiell differenzierbar ist. Dieses Problem ist jedoch lösbar, falls f Hölder-stetig auf $\overline{\Omega}$ ist, d.h., es gibt ein $\alpha \in (0, 1)$ und eine Konstante $K = K(f)$, so dass die Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha \quad \text{für alle } x, y \in \Omega$$

gilt. Unter dieser Voraussetzung existieren die partiellen Ableitungen $\partial_i \partial_j u$ und sind ebenfalls Hölder-stetig auf $\overline{\Omega}$ zum Exponenten α . Anstelle des technisch aufwändigen Beweises soll hier nur der einfachere Fall mit $f \in C^2(\overline{\Omega})$ untersucht werden.

Korollar 4.5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und

$$u(x) = \int_{\Omega} E(x - y) f(y) dy.$$

(1) Die Funktion u ist stetig partiell differenzierbar, und es gilt

$$\nabla u(x) = \int_{\Omega} \nabla_x E(x - y) f(y) dy. \quad (4.6)$$

(2) Liegt f sogar im Raum $C^1(\overline{\Omega})$, ist u zweimal stetig partiell differenzierbar und eine spezielle Lösung des Poisson-Problems $-\Delta u = f$ in Ω .

Beweis

(1) Die üblichen Konvergenzsätze können nicht zum Beweis der Aussage $\frac{1}{h}(u(x + h e_i) - u(x)) \rightarrow \partial u / \partial x_i$ für $h \rightarrow 0+$, $1 \leq i \leq n$, benutzt werden, da der Term $E(x + h e_i - y)$ eine mit h wandernde Singularität in $y = x + h e_i$ besitzt. Stattdessen werden eine Abschneidefunktion $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta(t) = 0 \quad \text{für } |t| \leq 1, \quad \eta(t) = 1 \quad \text{für } |t| \geq 2, \quad 0 \leq \frac{d\eta}{dt} \leq 2$$

und $\eta_\varepsilon(y) = \eta(\frac{|y|}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, benutzt. Ersetzt man $E(x - y)$ durch $(\eta_\varepsilon E)(x - y)$, erhält man die beliebig oft differenzierbare Funktion

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} (\eta_\varepsilon E)(x - y) f(y) dy,$$

die für $\varepsilon \rightarrow 0+$ gleichmäßig in $\overline{\Omega}$ gegen u konvergiert. Insbesondere ist u stetig auf $\overline{\Omega}$. Für den gewünschten Gradienten

$$w(x) = \int_{\Omega} \nabla_x E(x - y) f(y) dy$$

von $u(x)$, der auf Grund der Abschätzung $|\nabla_x E(x-y)| = O(|x-y|^{1-n})$ für jedes $x \in \overline{\Omega}$ existiert, gilt dann

$$w(x) - \nabla u_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \nabla((1-\eta_\varepsilon)E)(x-y)f(y) dy.$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |w(x) - \nabla u_\varepsilon(x)| &\leq \|f\|_\infty \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} \left(|\nabla E| + \frac{2}{\varepsilon} |E| \right) (x-y) dy \\ &\leq \|f\|_\infty c \varepsilon (1 + (|\log \varepsilon|, \text{ falls } n = 2)). \end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge der stetigen Funktionen (∇u_ε) für $\varepsilon \rightarrow 0+$ gleichmäßig in $\overline{\Omega}$ gegen w . Da bereits $u_\varepsilon \rightarrow u$ gezeigt wurde, gilt $w = \nabla u$ und $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

(2) Ist $f \in C^1(\overline{\Omega})$, liefert eine partielle Integration in (4.6)

$$\begin{aligned} \nabla u(x) &= - \int_{\Omega} \nabla_y E(x-y)f(y) dy \\ &= \int_{\Omega} E(x-y)\nabla f(y) dy - \int_{\partial\Omega} E(x-y)f(y) N(y) do_y; \end{aligned}$$

dabei muss im Beweis die partielle Integration zuerst über $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ und ein anschließender Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0+$ wie im Beweis von Satz 4.3 durchgeführt werden. Da ∇f beschränkt auf $\overline{\Omega}$ ist, können nach (1) partielle Ableitungen zweiter Ordnung von u angegeben werden. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \partial_{x_i} E(x-y) \partial_i f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \partial_{x_i} E(x-y) f(y) N_i(y) do_y \right) \\ &= - \int_{\Omega} \nabla_y E(x-y) \cdot \nabla f(y) dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial N_y}(x-y) f(y) do_y. \end{aligned}$$

Zur Vorbereitung einer weiteren partiellen Integration im ersten Integral wird Ω durch $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ ersetzt. Da $\Delta E(x-y) = 0$ für $x \neq y$ ist und sich die Randintegrale über $\partial\Omega$ aufheben, liefert der Grenzübergang

$$- \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial E}{\partial N_y}(x-y) f(y) do_y \rightarrow -f(x) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0+,$$

s. Beweis von Satz 4.3, die Behauptung $-\Delta u = f$. ■

Die abschließende Darstellungsformel (4.7), die sog. Mittelwertformel, ist entscheidend für den Beweis des Maximum- und Minimumprinzips im Abschnitt 4.2. Diese wichtigen Prinzipien zur Abschätzung von Lösungen werden jedoch nicht nur für Lösungen von partiellen Differentialgleichungen benötigt, sondern auch für „Lösungen“ von Differentialungleichungen. Dementsprechend wird der Begriff der harmonischen Funktion wie folgt verallgemeinert:

Definition 4.6 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{subharmonisch} \\ \text{harmonisch} \\ \text{superharmonisch} \end{array} \right\}, \quad \text{falls} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u \leq 0 \\ -\Delta u = 0 \\ -\Delta u \geq 0 \end{array} \right\} \quad \text{in } \Omega \text{ gilt.}$$

Als Beispiel erwähnen wir, dass auf \mathbb{R} die Begriffe subharmonisch und konvex, superharmonisch und konkav sowie harmonisch und affin linear jeweils übereinstimmen. Im \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, sind die zuvor eingeführten Begriffe jedoch wesentlich allgemeiner als die Begriffe Konvexität etc.

Satz 4.7 (Mittelwertformel) Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Dann gelten für alle Kugeln $B_R(x)$ mit $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ die Darstellungen

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) \, d\sigma \quad (4.7)$$

und

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x)} u(y) \, dy. \quad (4.8)$$

Ist u sub- oder superharmonisch, muss in beiden Formeln das Gleichheitszeichen durch \leq bzw. durch \geq ersetzt werden.

Beweis Aus dem Beweis von Lemma 3.2 (Gleichung von Darboux) ist die Identität

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) \, dy = r^{n-1} \partial_r \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r} u \, d\sigma \right) = r^{n-1} \partial_r M_u(x, r) \quad (4.9)$$

bekannt. Folglich ist $M_u(x, r)$ als Funktion von $r \geq 0$ konstant bzw. $\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \end{array} \right\}$, wenn u harmonisch bzw. $\left\{ \begin{array}{l} \text{subharmonisch} \\ \text{superharmonisch} \end{array} \right\}$ ist. Ferner ist $M_u(x, 0) = u(x)$. Im Fall einer subharmonischen Funktion u gilt also

$$u(x) = M_u(x, 0) \leq M_u(x, r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma.$$

Damit ist (4.7) (in Ungleichungsform) für subharmonische Funktionen bewiesen. Integriert man die Ungleichung

$$\omega_n r^{n-1} u(x) \leq \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma$$

bzgl. r von 0 bis R , folgt nach Division durch $\omega_n R^n/n$ die Aussage (4.8) als Ungleichung. Analog erhält man die gewünschten Ungleichungen für superharmonische Funktionen. Da eine harmonische Funktion sowohl sub- als auch superharmonisch ist, folgen (4.7) und (4.8) für harmonische Funktionen. ■

4.2 Maximum- und Minimumprinzip

Satz 4.8 (Schwach Maximum- und Minimumprinzip) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

(1) Ist u subharmonisch, gilt

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u. \quad (4.10)$$

(2) Ist u superharmonisch, gilt

$$\inf_{\overline{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u. \quad (4.11)$$

Beweis Sei u subharmonisch. Da Ω beschränkt und u stetig auf $\overline{\Omega}$ ist, nimmt u sein Maximum in einem Punkt $x_0 \in \overline{\Omega}$ an. Würde x_0 in Ω liegen, folgt $\Delta u(x_0) \leq 0$. Dabei ist $\Delta u(x_0) < 0$ ausgeschlossen, denn u ist subharmonisch.

Um den möglichen Fall $\Delta u(x_0) = 0$ zu umgehen, betrachten wir $v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2$, $\varepsilon > 0$, statt u . Wegen $-\Delta v_\varepsilon = -\Delta u - 2n\varepsilon < 0$ ist v_ε in Ω subharmonisch. Nach dem obigen Beweisteil kann v_ε sein Maximum nur auf $\partial\Omega$ annehmen, d.h.

$$\sup_{\overline{\Omega}} u \leq \sup_{\overline{\Omega}} (u + \varepsilon|x|^2) = \sup_{\partial\Omega} (u + \varepsilon|x|^2).$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0+$ folgt daraus $\sup_{\overline{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u$ und damit die Behauptung.

Ist u superharmonisch, wird die Aussage analog bewiesen. ■

Korollar 4.9 (Eindeutigkeitssatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $f \in C^0(\Omega)$ und $g \in C^0(\partial\Omega)$. Dann besitzt das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Beweis Seien $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ Lösungen des Dirichlet-Problems. Dann löst $v = u_1 - u_2$ die homogene Gleichung

$$-\Delta v = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Nach Satz 4.8 genügt v dem schwachen Maximum- und Minimumprinzip. Daraus folgt $v = 0$ und $u_1 = u_2$. ■

Eine Verschärfung des schwachen Maximum- und Minimumprinzips Satz 4.8 wird mit der Mittelwertformel (4.8) bewiesen.

Satz 4.10 (Starkes Maximum- und Minimumprinzip) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein (beschränktes oder unbeschränktes) Gebiet und sei $u \in C^2(\Omega)$ sub- bzw. superharmonisch. Falls es einen Punkt $x_0 \in \Omega$ mit der Eigenschaft

$$u(x_0) = \sup_{\Omega} u \quad \text{bzw.} \quad u(x_0) = \inf_{\Omega} u$$

gibt, ist u konstant. Insbesondere kann eine harmonische Funktion ihr Maximum oder Minimum nicht in Ω annehmen, falls die Funktion nicht konstant ist.

Beweis Sei u subharmonisch und gelte $u(x_0) = \sup_{\Omega} u$. Nach (4.8) gilt für jede Kugel $B_R(x_0)$ mit $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$

$$u(x_0) \leq \frac{n}{w_n R^n} \int_{B_R(x_0)} u(y) dy \leq \sup_{\Omega} u = u(x_0).$$

Deshalb stimmt u auf $B_R(x_0)$ mit $u(x_0)$ überein.

Zum Abschluss des Beweises wird ein topologisches Argument benutzt. Sei $M = \{y \in \Omega : u(y) = u(x_0)\}$. Nach Voraussetzung ist $M \neq \emptyset$. Die Stetigkeit von u impliziert die relative Abgeschlossenheit von M in Ω . Schließlich zeigt der erste Beweisschritt, dass M auch offen ist. Da Ω ein Gebiet ist, folgt $M = \Omega$; die Funktion u ist also auf Ω konstant gleich $u(x_0)$. ■

Das einfache Beweisprinzip von Satz 4.8 kann auf viel allgemeinere Situationen übertragen werden, in denen u.a. der Laplace-Operator durch einen allgemeinen elliptischen Operator zweiter Ordnung ersetzt wird. Anschließend gestatten die aus dem Maximum- und Minimumprinzip hergeleiteten Aussagen *a priori*-Abschätzungen von Lösungen, die nicht explizit bestimmt werden können.

Definition 4.11 Auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seien stetige, beschränkte Funktionen $a_{ij}, b_i, c: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq j \leq n$, gegeben. Die aus den Funktionen $a_{ij}(x)$ gebildete Matrixfunktion $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ sei gleichmäßig positiv definit, d.h., es gebe eine positive Zahl α_0 , so dass

$$\langle y, A(x)y \rangle := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) y_i y_j \geq \alpha_0 |y|^2$$

für alle $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt. Dann heißt

$$Lu(x) := - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_i \partial_j u + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u + c(x)u$$

ein *elliptischer Differentialoperator* zweiter Ordnung.

Bemerkung 4.12 (1) Im Fall $b_i = c = 0$ und $a_{ij} = \delta_{ij}$, also $A = I$, ist $L = -\Delta$.

- (2) Der Fall konstanter Koeffizienten a_{ij}, b_i, c mit $b_i = c = 0$ kann durch eine Variablentransformation auf den Fall $-\Delta$ zurückgeführt werden. Sei $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine konstante, invertierbare Matrix, $y = Qx$ und $v(y) = u(x)$. Dann rechnet man leicht die Formel

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j}$$

nach; dabei ist die Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1}^n$ durch

$$\tilde{A} = Q^T A Q$$

definiert. Nach Voraussetzung ist die Matrix A symmetrisch und positiv definit. Also gibt es nach dem Satz über Hauptachsentransformationen eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n,n}$, so dass

$$S^T A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: D$$

Diagonalgestalt mit den positiven Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A in der Diagonalen hat. Dann transformiert $Q := S D^{-1/2}$ mit $D^{-1/2} = \text{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_n^{-1/2})$ die Matrix A auf $\tilde{A} = I$. Folglich gilt

$$Lu(x) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i \partial_j u(x) = -\Delta_y v(y).$$

- (3) Der Beweis des folgenden Satzes 4.13 benötigt zur Untersuchung des Ausdrucks $\sum a_{ij} \partial_i \partial_j u$ eine spezielle Aussage aus der Linearen Algebra: Für symmetrische, positiv semidefinite Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ gilt

$$A : B := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} = \text{tr}(AB) \geq 0.$$

Dabei bezeichnet $\text{tr}(C) := \sum_{i,j=1}^n c_{ij}$ die Spur einer Matrix $C = (c_{ij})$.

Beweis Es ist bekannt, dass die Spur die Eigenschaft $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ hat; insbesondere gilt für jede invertierbare Matrix C

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(C^{-1}AC).$$

Also gilt mit der orthogonalen Matrix S und der Diagonalmatrix D aus Teil 2

$$A : B = \text{tr}(AB) = \text{tr}(S^T A S S^T B S) = \text{tr}(D \tilde{B}),$$

wobei \tilde{B} die positiv semidefinite Matrix $\tilde{B} = S^T B S$ bezeichnet. Da sowohl alle Diagonalelemente der Diagonalmatrix D als auch der Matrix \tilde{B} nichtnegativ sind, folgt jetzt

$$A : B = \text{tr}(D \tilde{B}) \geq 0.$$

Satz 4.13 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, L ein elliptischer Differentialoperator und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

- (1) Sei $c = 0$. Ist $Lu \leq 0$ bzw. $Lu \geq 0$ in Ω , gilt das schwache Maximum- bzw. Minimumprinzip

$$\sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \text{bzw.} \quad \inf_{\bar{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u. \quad (4.12)$$

- (2) Sei $c \geq 0$ und $Lu \leq 0$ bzw. $Lu \geq 0$. Dann gilt

$$\sup_{\bar{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad \text{bzw.} \quad \inf_{\bar{\Omega}} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-, \quad (4.13)$$

wobei $u^+ = \max(u, 0)$ und $u^- = \min(u, 0)$ ist.

Beweis

- (1) Statt u betrachten wir die Funktionen $v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{dx_1}$ mit $\varepsilon > 0$, $d > 0$. Offensichtlich gilt

$$L(e^{dx_1})(x) = (-d^2 a_{11}(x) + db_1(x))e^{dx_1}.$$

Da die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))$ gleichmäßig positiv definit ist, ist $a_{11}(x)$ positiv und gleichmäßig nach unten beschränkt. Ferner ist b_1 auf $\bar{\Omega}$ beschränkt. Also gibt es ein genügend großes $d > 0$, so dass $L(e^{dx_1}) < 0$ auf $\bar{\Omega}$ ist.

Aus der Voraussetzung $Lu \leq 0$ folgt damit $Lv_\varepsilon < 0$ auf $\bar{\Omega}$. Nun nehme die Funktion v_ε ihr Maximum in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ an. Also gilt $\nabla v_\varepsilon(x_0) = 0$, und die Matrix $(\partial_i \partial_j v_\varepsilon(x_0))$ ist negativ semidefinit. Dann folgt mit Bemerkung 4.12 (3) der Widerspruch

$$0 > Lv_\varepsilon(x_0) = - \underbrace{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \partial_i \partial_j v_\varepsilon(x_0)}_{\leq 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^n b_i(x_0) \partial_i v_\varepsilon(x_0)}_{=0} \geq 0.$$

Analog beweist man die Aussage, falls $Lu \geq 0$ gilt.

Für den nun folgenden Beweis von (2) beachte man, dass die Aussage (1) auch in beliebigen offenen, beschränkten Mengen gilt.

- (2) Sei $c \geq 0$, $Lu \leq 0$, und sei $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$. Falls $\Omega^+ = \emptyset$, ist nichts zu zeigen. Anderenfalls gilt auf der offenen Menge $\Omega^+ \neq \emptyset$

$$(L - c)u|_{\Omega^+} = L(u|_{\Omega^+}) - cu|_{\Omega^+} \leq 0$$

gilt. Nach (1) nimmt $u|_{\Omega^+}$ sein Maximum in einem Punkt $x_0 \in \partial\Omega^+$ an, d.h.,

$$\sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\Omega^+} u = \sup_{\partial\Omega^+} u = u(x_0) > 0.$$

Der Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega^+$ kann nicht in Ω liegen, da sonst $u(x_0) = 0$ folgen würde. Also gilt $x_0 \in \partial\Omega$ und $\sup_{\partial\Omega^+} u = \sup_{\partial\Omega} u^+$. Der Fall $Lu \geq 0$ wird analog bewiesen. ■

Korollar 4.14 Sei L ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung mit $c \geq 0$ auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(1) (Eindeutigkeitssatz) Das Randwertproblem

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (4.14)$$

besitzt für Daten $f \in C^0(\Omega)$ und $g \in C^0(\partial\Omega)$ höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

(2) (Vergleichssatz) Für Funktionen $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ gelte

$$Lv \leq Lw \quad \text{in } \Omega \quad \text{und} \quad v \leq w \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Dann gilt $v \leq w$ in Ω .

(3) (Einschließungssatz) Für Daten $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$ und Funktionen $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ gelte

$$Lv \leq f \leq Lw \quad \text{in } \Omega, \quad v \leq g \leq w \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Dann genügt die eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ des Randwertproblems (4.14) der Ungleichung

$$v \leq u \leq w \quad \text{in } \Omega.$$

Beweis Da (1) und (3) aus dem Vergleichssatz (2) folgen, wird nur (2) bewiesen. Nach Voraussetzung hat $u = v - w$ die Eigenschaften $Lu \leq 0$ in Ω und $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Aus (4.13) folgt also $\sup_{\bar{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ = 0$, d.h., $v \leq w$ in Ω . ■

Bemerkung 4.15 (1) Die Existenz einer Lösung des Randwertproblems (4.14) für einen allgemeinen elliptischen Operator L kann mit den hier zur Verfügung stehenden Methoden nicht bewiesen werden.

(2) Der Beweis von Satz 4.13 (2) benutzte die Voraussetzung $c \geq 0$. Auf diese Bedingung kann *nicht* verzichtet werden. Für $\lambda > 0$ betrachte man z.B. das Dirichlet-Problem

$$-\Delta u - \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega;$$

es ist also $c = -\lambda < 0$. dann löst für $\lambda = \lambda_{k,\ell} = (k^2 + \ell^2)\pi^2$, $k, \ell \in \mathbb{N}$,

$$u(x_1, x_2) = \sin k\pi x_1 \cdot \sin \ell\pi x_2$$

obiges Dirichlet-Problem und genügt keinem Minimum- oder Maximumprinzip. In diesem Fall ist u Lösung des Eigenwertproblems

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

zum Eigenwert λ .

- (3) Auch für Gleichungen höherer Ordnung wie z.B. der biharmonischen Gleichung

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

gibt es kein Maximum- oder Minimumprinzip: Die Funktion $u(x) = 1 - |x|^2$ ist *biharmonisch*, positiv in $B_1(0)$ und verschwindet auf $\partial B_1(0)$.

Beispiel 4.16 Der Einschließungssatz wird benutzt, um nicht explizit berechenbare Lösungen einzuschließen oder zu approximieren.

Man betrachte das Dirichlet-Problem $-\Delta u = 0$ im Sektor $\Omega = \{(x_1, x_2) \in B_1(0) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ mit den Randwerten $u(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$. Da für $(x_1, x_2) \in \partial\Omega$

$$0 \leq u(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

gilt, folgt aus dem Einschließungssatz oder direkt mit Satz 4.8

$$0 \leq u(x_1, x_2) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{in } \Omega.$$

Durch eine geschickte Auswahl von Vergleichsfunktionen läßt sich dieses Ergebnis erheblich verbessern. Die Funktionen $v(x_1, x_2) = a(x_1 + x_2) + bx_1 x_2$ sind für jedes $a, b \in \mathbb{R}$ harmonisch. Da $\sqrt{2} x_1 x_2 \leq \sqrt{|x_1 x_2|}$ auf $\partial\Omega$ gilt, ist $\sqrt{2} x_1 x_2$ eine punktweise untere Schranke der gesuchten Lösung u . Ferner gilt $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ für alle $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Deshalb erfüllt die gesuchte Lösung die Ungleichung

$$\sqrt{2} x_1 x_2 \leq u(x_1, x_2) \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{in } \Omega.$$

Satz 4.17 (A priori-Abschätzung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, L ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung mit $c \geq 0$, es sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

- (1) Ist $Lu \leq f$, gilt

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + M \sup_{\Omega} f^+. \quad (4.15)$$

- (2) Im Fall $Lu \geq f$ gilt

$$\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^- + M \inf_{\Omega} f^-.$$

- (3) Schließlich genügt die Lösung u der Poisson-Gleichung $Lu = f$ der a priori-Abschätzung

$$\|u\|_{\infty, \Omega} \leq \|u\|_{\infty, \partial\Omega} + M \|f\|_{\infty, \Omega}. \quad (4.16)$$

Die Konstante $M \geq 0$ hängt nur vom Durchmesser von Ω und von $\frac{1}{\alpha_0} \|b\|_{\infty, \Omega}$, s. Definition 4.11, ab.

Beweis

- (1) Ohne Einschränkung gelte $0 < x_1 < \ell$ für alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. Mit den Größen $\alpha_0 > 0$ und $\|b\|_{\infty, \Omega}$ aus Definition 4.11 erhält man für genügend großes $d > 0$ die Abschätzung

$$(L - c(x))e^{dx_1} = (-d^2 a_{11}(x) + db_1(x))e^{dx_1} \leq (-\alpha_0 d^2 + d\|b\|_{\infty, \Omega})e^{dx_1} \leq -\alpha_0,$$

z.B. für $d = 1 + \frac{\|b\|_{\infty, \Omega}}{\alpha_0}$. Jetzt betrachte man die Vergleichsfunktion

$$w(x) = \sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{1}{\alpha_0} (e^{d\ell} - e^{dx_1}) \sup_{\Omega} f^+ \geq 0.$$

Offensichtlich gilt $w \geq u$ auf $\partial\Omega$ sowie

$$\begin{aligned} Lw(x) &\geq c(x) \sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{1}{\alpha_0} \left(c(x)(e^{d\ell} - e^{dx_1}) - (L - c(x))(e^{dx_1}) \right) \sup_{\Omega} f^+ \\ &\geq \sup_{\Omega} f^+ \geq f(x) \geq Lu(x). \end{aligned}$$

Nach dem Vergleichssatz (Korollar 4.14 (2)) folgt $w \geq u$ in Ω , also (4.15) mit $M = \frac{1}{\alpha_0} e^{d\ell}$.

- (2) Der Beweis von (2) verläuft analog mit Hilfe der Vergleichsfunktion

$$v(x) = \inf_{\partial\Omega} u^- + \frac{1}{\alpha_0} e^{dx_1} \inf_{\Omega} f^- \leq 0,$$

welche $v \leq u$ auf $\partial\Omega$ und $Lv \leq f \leq Lv$ in Ω erfüllt.

- (3) folgt aus (1) und (2). ■

Bemerkung 4.18 (1) Die a priori-Abschätzung (4.15) ist die direkte Verallgemeinerung von (4.13) auf den Fall $f^+ = \max(f, 0) \neq 0$. Nur Punkte $x \in \Omega$ mit $f(x) > 0$, in denen im Fall $L = -\Delta$ die Funktion u superharmonisch ist, müssen bei der Abschätzung von $\sup_{\Omega} u$ gesondert berücksichtigt werden.

- (2) Sei u_h eine z.B. numerisch gewonnene Näherung des Dirichlet-Problems $Lu = f$ in Ω , $u = g$ auf $\partial\Omega$ und gelte

$$Lu_h = f_h \text{ in } \Omega, \quad u_h = g_h \text{ auf } \partial\Omega.$$

Dann impliziert (4.16) die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{\infty, \Omega} \leq \|g - g_h\|_{\infty, \partial\Omega} + M \|f - f_h\|_{\infty, \Omega}.$$

Um die Eindeutigkeit der Lösung einer elliptischen Gleichung mit Neumann- oder Robin-Randbedingung zu beweisen, wird eine andere Version des starken Maximumprinzips benötigt.

Lemma 4.19 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $u \in C^2(\Omega)$ subharmonisch. Es sei $x_0 \in \partial\Omega$ ein Randpunkt mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) ∇u ist stetig nach x_0 fortsetzbar,
- (ii) $u(x_0) > u(x)$ für alle $x \in \Omega$,
- (iii) $\partial\Omega$ genügt in $x_0 \in \partial\Omega$ der inneren Kugelbedingung, d.h., es gibt eine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$.

Dann gilt

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x_0) > 0$$

für die äußere Normalenableitung.

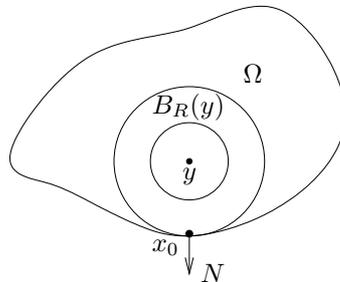


Abbildung 4.3: Die innere Kugelbedingung

Die gleiche Aussage gilt für einen elliptischen Operator L und eine Funktion u mit $Lu \leq 0$, falls die Bedingung

$$c(x) u(x_0) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in B_R(y)$$

erfüllt ist.

Beweis Wir benutzen eine subharmonische Hilfsfunktion h auf dem Kreisring $A = B_R(y) \setminus B_{R/2}(y)$ mit den Eigenschaften

$$h = 0 \text{ auf } \partial B_R(y), \quad h > 0 \text{ in } A, \quad \frac{\partial h}{\partial N}(x_0) < 0.$$

Konkret betrachtet man

$$h(x) = e^{-\alpha|x-y|^2} - e^{-\alpha R^2}, \quad \alpha > 0.$$

Offensichtlich verschwindet h auf $\partial B_R(y)$, mit $N = N(x_0) = \frac{x_0 - y}{|x_0 - y|}$ gilt

$$\frac{\partial h}{\partial N}(x_0) = -2\alpha N \cdot (x_0 - y) e^{-\alpha|x_0 - y|^2} < 0,$$

und für $\alpha > 0$ genügend groß erhält man

$$\Delta h(x) = 2\alpha e^{-\alpha|x-y|^2} (2\alpha|x-y|^2 - n) > 0 \quad \text{in } A.$$

Mit der Hilfsfunktion h definiert man

$$v_\varepsilon(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon h(x), \quad \varepsilon > 0.$$

Auf Grund der Voraussetzungen an u und h gibt es ein genügend kleines $\varepsilon > 0$, so dass

$$\begin{aligned} v_\varepsilon &\leq 0 \quad \text{auf } \partial A, \quad v_\varepsilon(x_0) = 0 \\ -\Delta v_\varepsilon &= -\Delta u - \varepsilon \Delta h \leq 0 \quad \text{in } A \end{aligned}$$

gilt. Mit dem schwachen Maximumprinzip (4.10) folgt $v_\varepsilon \leq 0$ in A . Wegen $v_\varepsilon(x_0) = 0$ muss folglich $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial N}(x_0) \geq 0$ gelten, also

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial N}(x_0) > 0.$$

Der Beweis im Fall $Lu \leq 0$ wird vollkommen analog geführt. Wie zuvor gibt es ein genügend großes $\alpha > 0$, so dass $(L - c^-)h < 0$ gilt; dabei ist $c^- = \min(c, 0)$. Dann ist

$$\begin{aligned} (L - c^-)v_\varepsilon(x) &= Lu - c^-u - cu(x_0) + c^-u(x_0) + \varepsilon(L - c^-)h \\ &\leq c^-(x)(u(x_0) - u(x)) - c(x)u(x_0) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

so dass das schwache Maximumprinzip (4.13) mit $L - c^-$ an Stelle von L

$$\sup_A v_\varepsilon \leq \sup_{\partial A} v_\varepsilon^+ = 0$$

impliziert. Jetzt führt der erste Beweisteil wieder zur Aussage $\frac{\partial u}{\partial N}(x_0) > 0$. ■

Satz 4.20 (Starkes Maximum- und Minimumprinzip) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und L ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung.

- (1) Sei $c = 0$ und $Lu \leq 0$ bzw. $Lu \geq 0$ in Ω . Nimmt u sein Maximum bzw. Minimum in einem Punkt $x_1 \in \Omega$ an, ist u konstant in Ω .
- (2) Sei $c \geq 0$ und $Lu \leq 0$ bzw. $Lu \geq 0$ in Ω . Nimmt u ein nichtnegatives Maximum bzw. ein nichtpositives Minimum in Ω an, ist u konstant in Ω .

Beweis Wir betrachten den Fall $c \geq 0$ und $Lu \leq 0$, in dem u sein Maximum $u(x_1) \geq 0$ in einem Punkt $x_1 \in \Omega$ annimmt. Angenommen, u ist nicht konstant in Ω . Dann ist $\Omega^- := \{x \in \Omega : u(x) < u(x_1)\}$ nichtleer und offen, und $\partial\Omega^- \cap \Omega \neq$

Ø. Man wähle einen Punkt $y \in \Omega^-$, der näher an $\partial\Omega^-$ als an $\partial\Omega$ liegt, und anschließend die größte Kugel $B_r(y)$ in Ω^- . Nach Konstruktion schneidet $B_r(y)$ den Rand $\partial\Omega^-$ in einem Punkt x_0 , in dem die Voraussetzungen von Lemma 4.19 erfüllt sind: $u(x_0) = u(x_1) > u(x)$ für alle $x \in B_r(y) \subset \Omega^-$, und in x_0 genügt Ω^- der inneren Kugelbedingung. Ferner gilt $c(x)u(x_0) \geq 0$ in Ω . Also gilt für einen in $\Omega \setminus \Omega^-$ hineinweisenden Normalenvektor N die Aussage $\partial u / \partial N(x_0) > 0$, welches zu einem Widerspruch zu $u = u(x_1)$ in $\Omega \setminus \Omega^-$ führt.

Die anderen Fälle werden analog bewiesen. ■

Satz 4.21 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, glattberandetes Gebiet, so dass in jedem Randpunkt die innere Kugelbedingung erfüllt ist und die Normalableitung ausgewertet werden kann. Ferner sei L ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung und $c \geq 0$.*

(1) (Eindeutigkeitssatz) *Die Poisson-Gleichung*

$$Lu = f \text{ in } \Omega \quad (4.17)$$

mit Neumann-Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial N} = g \text{ auf } \partial\Omega \quad (4.18)$$

oder mit Robin-Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha u = g \text{ auf } \partial\Omega \quad (4.19)$$

besitzt für Daten $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$ und $0 \leq \alpha \in C^0(\partial\Omega)$ höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, falls c oder α nicht identisch 0 ist. Gilt $c \equiv 0$ und $\alpha \equiv 0$, ist u nur bis auf Konstanten eindeutig bestimmt.

(2) (Vergleichssatz) *Für Funktionen $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gelte*

$$Lv \leq Lw \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial N} + \alpha v \leq \frac{\partial w}{\partial N} + \alpha w \text{ auf } \partial\Omega.$$

Falls c oder α nicht identisch 0 ist, gilt $v \leq w$ in Ω .

(3) (Einschließungssatz) *Es sei c oder α nicht identisch 0, und es gelte*

$$Lv \leq f \leq Lw \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial N} + \alpha v \leq g \leq \frac{\partial w}{\partial N} + \alpha w \text{ auf } \partial\Omega.$$

Dann genügt die eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ des Poisson-Problems $Lu = f$ mit Randbedingung (4.17) oder (4.19) der Ungleichung

$$v \leq u \leq w \text{ in } \Omega.$$

Beweis

- (1) Sind u_1, u_2 Lösungen von (4.17), (4.18) bzw. (4.17), (4.19), genügt $u = u_1 - u_2$ den Gleichungen $Lu = 0$ und

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad \text{oder} \quad \frac{\partial u}{\partial N} + \alpha u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (4.20)$$

Ist u nicht konstant, nimmt u (oder $-u$) nach Satz 4.20(2) sein Maximum $u(x_0) \geq 0$ in einem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ an, und es gilt $u(x) < u(x_0)$ für alle $x \in \Omega$. Nach Lemma 4.19 folgt $\partial u / \partial N(x_0) > 0$ ein Widerspruch zur Randbedingung (4.20). Also stimmt u in Ω mit einer Konstanten M überein. Ist $\alpha \neq 0$, folgt aus (4.20) $0 = \alpha M$, also $M = 0$; im Fall $c \neq 0$ folgt aus $0 = Lu = cM$ ebenfalls $M = 0$.

- (2) Nach Voraussetzung gilt $L(v - w) \leq 0$ in Ω und $(\frac{\partial}{\partial N} + \alpha)(v - w) \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Falls $v \leq w$ nicht gilt, würde $v - w$ nach Satz 4.20(2) sein positives Maximum auf $\partial\Omega$ annehmen. Da die Möglichkeit $v - w = \text{const} > 0$ ausgeschlossen ist, liefert Lemma 4.19 wieder den Widerspruch $\partial(v - w) / \partial N > 0$ in einem Randpunkt.
- (3) folgt sofort aus (2). Man beachte, dass die Existenz einer Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ hier nicht gezeigt werden wird. ■

In unbeschränkten Gebieten wie dem Halbraum $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$ oder dem Außenraum $\mathbb{R}^n \setminus B_R$ der Kugel \overline{B}_R muss das Verhalten der Lösung u auch im Unendlichen vorgeschrieben werden, um Abschätzungen durch Maximumprinzipien oder Eindeutigkeit zu beweisen. Der Einfachheit halber soll nur das Dirichlet-Problem zu $-\Delta u = f$ untersucht werden. Eine Sonderrolle spielen zweidimensionale unbeschränkte Gebiete, da die Fundamentallösung $E(x) = -\frac{1}{2\pi} \log r$ für $r = |x| \rightarrow \infty$ unbeschränkt ist.

Satz 4.22 (Schwach Maximum- und Minimumprinzip in unbeschränkten Gebieten)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein unbeschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

- (1) Ist $n \geq 2$ und u subharmonisch, gilt

$$\sup_{\Omega} u = \max\left\{\sup_{\partial\Omega} u, \limsup_{|x| \rightarrow \infty} u(x)\right\}. \quad (4.21)$$

Falls u superharmonisch ist, gilt

$$\inf_{\Omega} u = \min\left\{\inf_{\partial\Omega} u, \liminf_{|x| \rightarrow \infty} u(x)\right\}.$$

- (2) Ist $n = 2$ und u nach oben beschränkt und subharmonisch bzw. nach unten beschränkt und superharmonisch, gilt

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \text{bzw.} \quad \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u. \quad (4.22)$$

Beweis

(1) Offensichtlich gilt

$$\sup_{\Omega} u \geq M := \max\left\{\sup_{\partial\Omega} u, \limsup_{|x| \rightarrow \infty} u\right\}.$$

Zum Beweis der Ungleichung $\sup_{\Omega} u \leq M$ braucht nur der Fall $M < \infty$ betrachtet werden. Nach Definition des limes superior gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $R_{\varepsilon} > 0$, so dass $|u(x)| < M + \varepsilon$ für alle $x \in \Omega$ mit $|x| \geq R_{\varepsilon}$ gilt. Aus $\partial(\Omega \cap B_R) \subset (\partial\Omega \cap \overline{B_R}) \cup (\overline{\Omega} \cap \partial B_R)$ folgt damit für jedes $R \geq R_{\varepsilon}$

$$\sup_{\partial(\Omega \cap B_R)} u \leq M + \varepsilon.$$

Dann liefert das schwache Maximumprinzip (4.10) in $\Omega \cap B_R$ die Abschätzung

$$\sup_{\Omega \cap B_R} u = \sup_{\partial(\Omega \cap B_R)} u \leq M + \varepsilon \quad \text{für } R \geq R_{\varepsilon},$$

also $\sup_{\Omega} u \leq M + \varepsilon$ im Grenzfall $R \rightarrow \infty$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung für subharmonische Funktionen. Die Aussage für superharmonische Funktionen wird analog bewiesen.

(2) Nach (1) ist für eine beschränkte, subharmonische Funktion u nur noch $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u$ zu zeigen. Zum Beweis wählen wir einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ sowie eine Zahl $C > 0$ mit $C \operatorname{dist}(x_0, \Omega) \geq 1$ und betrachten die subharmonische Funktion

$$u_{\varepsilon}(x) = u(x) - \varepsilon \log(C|x - x_0|)$$

auf Ω . Da u von oben beschränkt ist, gilt $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} u_{\varepsilon}(x) = -\infty$, also nach (1) für jedes $x \in \Omega$

$$u_{\varepsilon}(x) \leq \sup_{\Omega} u_{\varepsilon} = \sup_{\partial\Omega} u_{\varepsilon} \leq \sup_{\partial\Omega} u.$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0+$ erhält man daraus die Abschätzung $u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u$. Die Aussage für superharmonische Funktionen u wird analog mit der Hilfsfunktion $u_{\varepsilon}(x) = u(x) + \varepsilon \log(C|x - x_0|)$ bewiesen. ■

Bemerkung 4.23 Das Dirichlet-Problem

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1}, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial B_1, \quad u \rightarrow 1 \quad \text{in } \infty \quad (4.23)$$

besitzt für $n \geq 3$ die Lösung $u(x) = 1 - r^{2-n}$. Diese Lösung ist nach Satz 4.22 (1) eindeutig. Im Fall $n = 2$ würde eine Lösung u jedoch

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u = 0 = \inf_{\partial\Omega} u = \inf_{\Omega} u,$$

also $u \equiv 0$ im Widerspruch zur Bedingung $u \rightarrow 1$ in ∞ erfüllen. Das Dirichlet-Problem (4.23) besitzt im zweidimensionalen Fall *keine* Lösung.

Satz 4.24 Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ ein unbeschränktes Gebiet.

- (1) (Eindeutigkeitsatz) Für beliebige Daten $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $g \in C^0(\partial\Omega)$ und $u_\infty \in \mathbb{R}$ besitzt das Dirichlet-Problem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(x) \rightarrow u_\infty \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Im Fall $n = 2$ darf die Voraussetzung für $|x| \rightarrow \infty$ durch die schwächere Annahme „ u beschränkt“ ersetzt werden.

- (2) (Vergleichssatz) Die Funktionen $v, w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ sollen den Ungleichungen

$$-\Delta v \leq -\Delta w \quad \text{in } \Omega, \quad v \leq w \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad \limsup_{|x| \rightarrow \infty} v(x) \leq \liminf_{|x| \rightarrow \infty} w(x)$$

genügen. Dann gilt $v \leq w$ in Ω . Im Fall $n = 2$ darf die Voraussetzung für $|x| \rightarrow \infty$ durch „ v nach oben beschränkt, w nach unten beschränkt“ ersetzt werden.

Beweis

- (1) Die Differenz zweier Lösungen u_1, u_2 zu den Daten f, g, u_∞ erfüllt nach Satz 4.22 (1) die Bedingung $\sup_\Omega(u_1 - u_2) = 0 = \inf_\Omega(u_1 - u_2)$. Also ist $u_1 = u_2$.
- (2) Nach Voraussetzung ist $v - w$ subharmonisch. Ferner gilt $\sup_{\partial\Omega}(v - w) \leq 0$ und $\limsup_{|x| \rightarrow \infty}(v - w)(x) \leq 0$. Dann liefert Satz 4.22 (1) die Behauptung. Die schwächere Voraussetzung im zweidimensionalen Fall wird mit Satz 4.22 (2) behandelt. ■

4.3 Greensche Funktionen und Poisson-Kerne

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand. Im Dirichlet-Problem der Laplace-Gleichung wird zu einer vorgegebenen Randfunktion $a : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ gesucht mit

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= a \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Dabei bedeutet $u = a$ auf $\partial\Omega$, dass für jedes $x \in \partial\Omega$

$$a(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} u(y) \tag{4.25}$$

gilt. In diesem Fall ist a in x stetig, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|a(x) - u(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in B_\delta(x) \cap \Omega$. Betrachtet man jetzt eine Folge $(y_k) \subset B_\delta(x) \cap \Omega$ mit $y_k \rightarrow x' \in B_\delta(x) \cap \partial\Omega$, folgt aus (4.25)

$$|a(x) - a(x')| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x' \in B_\delta(x) \cap \partial\Omega.$$

Analog wird das *Neumann-Problem der Laplace-Gleichung* durch

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial N} = a \text{ auf } \partial\Omega \quad (4.26)$$

definiert.

Lemma 4.25 *In der Greenschen Formel (4.2) ersetze man die Fundamentallösung $E(x - y)$ durch*

$$G(x, y) = E(x - y) - g(x, y) \quad (4.27)$$

mit einer Funktion $g : \Omega \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, die für festes $x \in \Omega$ bzgl. $y \in \Omega$ harmonisch ist und $g(x, \cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$ erfüllt. Dann gilt für $u \in C^2(\bar{\Omega})$ und jedes $x \in \Omega$ die Integraldarstellung

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y)(-\Delta u)(y)dy + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial N} G(x, y) - u \frac{\partial}{\partial N_y} G(x, y) \right) do_y. \quad (4.28)$$

Beweis Man wiederhole den Beweis von Satz 4.3, indem man mit dem Integral $\int G(x, y)(-\Delta u)(y)dy$ über $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ startet. Da g keine Singularitäten in $\Omega \times \bar{\Omega}$ besitzt, entstehen keine neuen Terme oder Schwierigkeiten beim Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0+$. ■

Zur Lösung des Dirichlet-Problems (4.24) versuche man, die Funktion g in Lemma 4.25 derart zu wählen, dass $G(x, y)$ für jedes $x \in \Omega$ und $y \in \partial\Omega$ verschwindet. D.h., für alle $x \in \Omega$ gelte

$$g(x, \cdot) = E(x - \cdot) \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (4.29)$$

In diesem Fall heißt $G(x, y) = E(x - y) - g(x, y)$ die *Greensche Funktion* zu $-\Delta$ auf Ω . Offensichtlich hat G für jedes $x \in \Omega$ die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} G(x, \cdot) &\text{ ist harmonisch in } \Omega \setminus \{x\} \\ G(x, \cdot) &\in C^1(\bar{\Omega} \setminus \{x\}) \\ G(x, \cdot) &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \\ G(x, y) &\approx E(x - y) \text{ für } y \rightarrow x. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Satz 4.26 *Für das beschränkte, glattberandete Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gebe es eine Greensche Funktion $G(x, y)$. Dann gilt für jede harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ die Integraldarstellung*

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial N_y} G(x, y) do_y. \quad (4.31)$$

Beweis Ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$, folgt die Behauptung mit Lemma 4.25. Falls nur $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gilt, benutzt man (4.28) mit der gegebenen Greenschen Funktion G auf einer geeigneten Folge von Gebieten (Ω_k) , die Ω von innen ausschöpfen, vgl. den Beweis von Korollar 4.4. Mit (4.30) folgt für jedes $x \in \Omega$ – unter Weglassen weiterer Details –, dass

$$\int_{\partial\Omega_k} \left(\frac{\partial u}{\partial N} G(x, y) - u \frac{\partial}{\partial N_y} G(x, y) \right) do_y$$

für $k \rightarrow \infty$ gegen die rechte Seite von (4.31) konvergiert. \blacksquare

Die Formel (4.31) liefert eine mögliche Lösung des Dirichlet-Problems (4.24), nämlich

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} a(y) \frac{\partial}{\partial N_y} G(x, y) do_y.$$

Im Einzelfall muss jedoch gezeigt werden, dass u tatsächlich harmonisch ist und die Randwerte a im Sinne von (4.25) annimmt.

Beispiel 4.27 Sei $\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$ der obere Halbraum. Obwohl Ω unbeschränkt ist, führt das zuvor beschriebene Verfahren zum Ziel. Für $x = (x', x_n) \in \Omega$ sei

$$x^* = (x', -x_n) \in \mathbb{R}_-^n$$

der am Halbraumrand $\partial\Omega = \{(x', 0) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ gespiegelte Punkt, und sei

$$\begin{aligned} G(x, y) &= E(x - y) - E(x^* - y) \\ &= E(x - y) - E(x - y^*). \end{aligned}$$

Da $E(x^* - y)$ keine Singularität für $x \in \Omega$, $y \in \overline{\Omega}$ besitzt, erfüllt G die Bedingungen (4.30) und ist eine geeignete Greensche Funktion. Für $y = (y', 0) \in \partial\mathbb{R}_+^n$, $n \geq 2$, berechnet man mit dem Normalenvektor $N_y = -e_n = (0, \dots, 0, -1)$ den sog. *Cauchy-Poisson-Kern*

$$K(x, y') := -\frac{\partial}{\partial N_y} G(x, y) = +\frac{\partial}{\partial y_n} G(x, y) = \frac{2}{\omega_n} \frac{x_n}{|x - y|^n},$$

also

$$K(x, y') = \frac{2}{\omega_n} \frac{x_n}{(|x' - y'|^2 + x_n^2)^{n/2}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n, y' \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (4.32)$$

Offensichtlich hat K für $y = (y', 0) \in \partial\mathbb{R}_+^n$ die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} K(x, y') &\text{ ist harmonisch in } x \in \mathbb{R}_+^n, \\ K(x, y') &\rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \in \partial\mathbb{R}_+^n, x_0 \neq y, \\ K(x, y') &> 0 \quad \text{für } x > 0, \\ \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(x, y') dy' &= 1 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Die erste Eigenschaft folgt aus der Harmonizität von G in x und aus der Definition $K = -\frac{\partial}{\partial N_y}G$. Zum Beweis der wichtigen Integralbedingung (4.33)₄ benutze man (4.28) für $u \equiv 1$ auf der oberen Halbkugel

$$B_R^+ = \{y = (y', y_n) \in B_R : y_n > 0\} \subset \mathbb{R}_+^n$$

mit $x \in B_R^+$ und lasse R gegen unendlich laufen. Nach (4.28) ist

$$1 = \int_{|y'| \leq R} K(x, y') dy' - \int_{\partial B_R^+ \cap \mathbb{R}_+^n} \frac{\partial}{\partial N_y} G(x, y) do_y,$$

wobei für $y \in \partial B_R^+ \cap \mathbb{R}_+^n$ wegen $N_y = \frac{y}{|y|}$

$$\frac{\partial}{\partial N_y} G(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{x - y}{|x - y|^n} - \frac{x^* - y}{|x^* - y|^n} \right) \cdot \frac{y}{|y|}$$

gilt. Die Summanden mit $x|x - y|^{-n}$ bzw. $x^*|x^* - y|^{-n}$ sind für $y \in \partial B_R^+ \cap \mathbb{R}_+^n$ vom Typ $O(R^{-n})$. Ferner gilt

$$|x - y|^n = |y|^n \left| 1 - \frac{x}{|y|} \right|^n = |y|^n (1 + O(R^{-1})),$$

und $|x^* - y|^n = |y|^n (1 + O(R^{-1}))$, so dass auch

$$\left(\frac{y}{|x - y|^n} - \frac{y}{|x^* - y|^n} \right) = y \frac{|x^* - y|^n - |x - y|^n}{|x - y|^n \cdot |x^* - y|^n}$$

vom Typ $O(R^{-n})$ ist. Da das Oberflächenmaß von $\partial B_R^+ \cap \mathbb{R}_+^n$ nur wie $O(R^{n-1})$ anwächst, folgt für $R \rightarrow \infty$ die Integralbedingung (4.33)₄.

Satz 4.28 Für jede beschränkte, stetige Funktion $a \in BC^0(\mathbb{R}^{n-1})$ ist

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a(y') K(x, y') dy' \quad (4.34)$$

eine harmonische Funktion in $BC^0(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, die die Randwerte a auf $\partial \mathbb{R}_+^n$ annimmt.

Beweis An der Darstellung des Cauchy-Poisson-Kerns (4.32) liest man das Abklingverhalten

$$|K(x, y')| \leq \frac{c(x_n)}{(x_n^2 + |y'|^2)^{n/2}} \leq \frac{c(x_n)}{|y'|^n}$$

mit einer von x_n abhängigen Konstanten $c(x_n)$ für $|y'| \rightarrow \infty$ ab. Da sich das Abklingverhalten bzgl. $|y'| \rightarrow \infty$ für partielle Ableitungen nach x nicht verschlechtert, zeigt man mit Hilfe von Differenzenquotienten die Differenzierbarkeit von u nach x . Insbesondere dürfen partielle Ableitungen für $u(x)$ unter dem Integralzeichen auf $K(x, y')$ angewandt werden. Da K bzgl. x harmonisch ist, gilt

$\Delta u = 0$. Aus (4.33)_{3,4} folgt die Abschätzung $|u(x)| \leq \|a\|_\infty$, so dass u auf der oberen Halbebene beschränkt ist.

Der Beweis, dass $u(x) \rightarrow a(x'_0)$ für $x \in \mathbb{R}_+^n$, $x \rightarrow (x'_0, 0) \in \partial\mathbb{R}_+^n$, konvergiert, benutzt die sich aus (4.33)₄ ergebende Darstellung

$$u(x) - a(x'_0) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x, y') (a(y') - a(x'_0)) dy',$$

die Stetigkeit von a und (4.33)₁₋₃. Da in Satz 4.31 ein analoger Beweis für die Kugel $\Omega = B_R(0)$ geführt werden wird, soll an dieser Stelle auf weitere Beweisdetails verzichtet werden. ■

Bemerkung 4.29 Die Lösung u aus (4.34) des Dirichlet-Problems (4.24) ist *nicht* eindeutig, denn neben u ist $u(x) + \alpha x_n$ für jedes $\alpha \neq 0$ eine Lösung von (4.24) zum Randwert a . Dagegen kann man mit einem Approximationsargument wie im Beweis der Integralbedingung (4.33)₄ zeigen, dass (4.24) nur eine beschränkte Lösung besitzt.

Beispiel 4.30 Sei $\Omega = B_R = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Analog zum Fall $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ wird die Greensche Funktion aus der Fundamentallösung durch eine Spiegelung von Punkten $x \in \Omega$ an $\partial\Omega$ gewonnen. Zu $x \in B_R$ bezeichne

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2} x \in \overline{B_R^c}$$

den Punkt auf dem durch 0 gehenden Strahl mit der Normbedingung $\frac{|x^*|}{R} = \frac{R}{|x|}$. Dann sei

$$G(x, y) := E(x - y) - E\left(\frac{|x|}{R}(x^* - y)\right). \quad (4.35)$$

Offensichtlich ist $g(x, y) = E\left(\frac{|x|}{R}(x^* - y)\right)$ harmonisch in $y \in B_R$. Auf Grund der Gleichung

$$\left(\frac{|x|}{R}|x^* - y|\right)^2 = R^2 - 2x \cdot y + \frac{|x|^2|y|^2}{R^2} = \left(\frac{|y|}{R}|y^* - x|\right)^2$$

und $E(x - y) = "E(|x - y|)"$ gilt aber

$$G(x, y) = G(y, x),$$

so dass G auch bzgl. $x \in B_R \setminus \{y\}$ harmonisch ist. Schließlich verschwindet G für $y \in \partial B_R$, denn $y^* = y$ für $|y| = R$. Die in Anbetracht von Satz 4.26 zu berechnende Normalableitung in G für $|y| = R$ liefert den *Poisson-Kern*

$$K(x, y) = -\frac{\partial}{\partial N_y} G(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R |x - y|^n}. \quad (4.36)$$

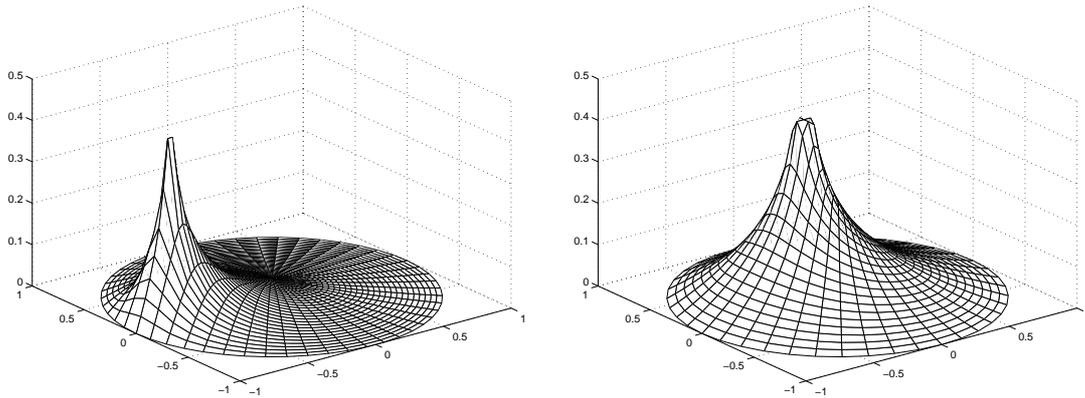


Abbildung 6.4: Die Greensche Funktion $G(x, y)$ in $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ für $y = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und für $y = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (auf geeigneter Höhe abgeschnitten)

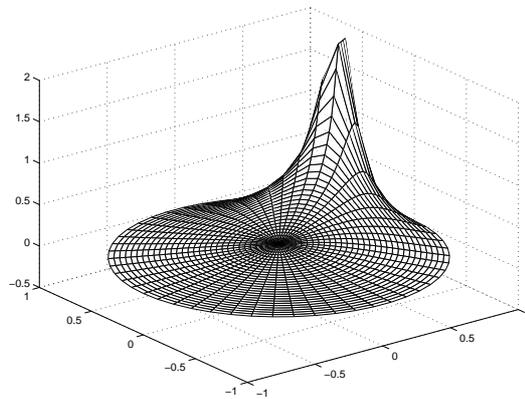


Abbildung 4.5: Der Poisson-Kern für $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ (auf der Höhe 2 abgeschnitten)

Satz 4.31 (1) Für jede harmonische Funktion $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$ gilt die Poissonsche Integralformel

$$u(x) = \int_{\partial B_R} K(x, y) u(y) do_y \quad (4.37)$$

mit dem Poisson-Kern K aus (4.36).

(2) Für jede Randfunktion $a \in C^0(\partial B_R)$ ist

$$u(x) = \int_{\partial B_R} K(x, y) a(y) do_y$$

die eindeutige Lösung des Dirichlet-Problems (4.24).

Beweis

- (1) Für $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B_R})$ folgt die Behauptung sofort mit Satz 4.26. Ist dagegen $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$ harmonisch, betrachte man für $\lambda > 1$ die skalierte Funktion

$$u_\lambda(x) = u\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in C^2(\overline{B_R}),$$

die ebenfalls harmonisch ist. Dann gilt mit Satz 4.26 und mit (4.36) für $x \in B_R$

$$u\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u\left(\frac{y}{\lambda}\right)}{|x - y|^n} d\omega_y.$$

Da $u \in C^0(\overline{B_R})$ ist, folgt für $\lambda \rightarrow 1+$ die Aussage (4.37).

- (2) Da $K(x, y)$ für $y \in \partial B_R$ keine Singularität bzgl. x in Ω hat, folgt sofort die Differenzierbarkeit von $u(x)$ und insbesondere die Harmonizität von u in Ω . Es bleibt also für jeden Randpunkt $x_0 \in \partial B_R$ die Konvergenz

$$u(x) \rightarrow a(x_0) \quad \text{für } x \in B_R, x \rightarrow x_0$$

zu zeigen. Da $K > 0$ und nach (4.37) mit $u \equiv 1$

$$\int_{\partial B_R} K(x, y) d\omega_y = 1 \tag{4.38}$$

gilt, schätzen wir für ein geeignetes $\delta > 0$ wie folgt ab:

$$\begin{aligned} |u(x) - a(x_0)| &= \left| \int_{\partial B_R} K(x, y) (a(y) - a(x_0)) d\omega_y \right| \\ &\leq \left(\int_{\substack{y \in \partial B_R \\ |y - x_0| < \delta}} + \int_{\substack{y \in \partial B_R \\ |y - x_0| \geq \delta}} \right) K(x, y) |a(y) - a(x_0)| d\omega_y. \end{aligned}$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählt man auf Grund der Stetigkeit von a ein $\delta > 0$ mit

$$|a(y) - a(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } y \in \partial B_R, |y - x_0| < \delta.$$

Damit wird das erste Integral auf der rechten Seite wegen $K > 0$ und (4.38) durch $\frac{\varepsilon}{2}$ abgeschätzt. Für das zweite Integral über $\partial B_R \setminus B_\delta(x_0)$ benutze man für $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ die Abschätzung

$$\int_{\substack{y \in \partial B_R \\ |y - x_0| \geq \delta}} \frac{1}{|x - y|^n} d\omega_y \leq \int_{\substack{y \in \partial B_R \\ |y - x_0| \geq \delta}} \frac{1}{(\delta/2)^n} d\omega_y \leq \frac{\omega_n R^{n-1}}{(\delta/2)^n},$$

woraus man

$$\int_{\substack{y \in \partial B_R \\ |y - x_0| > \delta}} K(x, y) |a(y) - a(x_0)| d\omega_y \leq 2 \|a\|_\infty \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \frac{\omega_n R^{n-1}}{(\delta/2)^n}$$

ableitet. An dieser Stelle wählt man $|x - x_0|$ ($< \frac{\delta}{2}$) und damit $R^2 - |x|^2$ zusätzlich so klein, dass die rechte Seite kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ wird. Zusammenfassend erhält man ein $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$, so dass $|u(x) - a(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in B_R$ mit $|x - x_0| < \delta'$ folgt. ■

Korollar 4.32 Für die zweidimensionale Kreisscheibe B_1 und für jede stetige 2π -periodische Funktion $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist (mit $x = (r \cos \theta, r \sin \theta)$)

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi) + 1} a(\varphi) d\varphi$$

die eindeutige Lösung des Dirichlet-Problems (4.34) mit Randwerten $a(\varphi)$ in $x = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

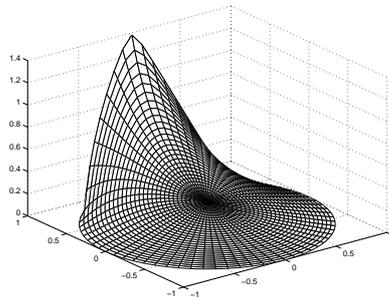


Abbildung 4.6: Lösung des Dirichlet-Problems in B_1 mit den Randdaten $a(\varphi) = \max(0, \frac{\pi}{2} - |\pi - 2\varphi|)$

Mit der Methode von O. Perron (1923) läßt sich das Dirichlet-Problem

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = a \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (4.39)$$

für beliebige beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und für Randdaten $a \in C^0(\partial\Omega)$ (eindeutig) lösen, falls $\partial\Omega$ geeignete Bedingungen erfüllt.

Satz 4.33 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ein beschränktes Gebiet und $a \in C^0(\partial\Omega)$.

- (1) Das Dirichlet-Problem (4.39) besitzt genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, falls $\partial\Omega$ die folgende Regularitätsbedingung erfüllt:

Fall $n \geq 3$ In jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ genügt Ω der äußeren Kugelbedingung, d.h., es gibt eine Kugel $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ mit $x \in \partial B_r(y)$.

Diese Bedingung ist erfüllt, falls sich $\partial\Omega$ lokal – nach einer geeigneten orthogonalen Koordinatentransformation – als Graph einer C^2 -Funktion schreiben läßt.

Fall $n = 2$ Zu jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ gibt es eine doppelpunktfreie (stetige) Kurve $\gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ mit Anfangspunkt x . Mit anderen Worten: keine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ besteht aus einem isolierten Punkt.

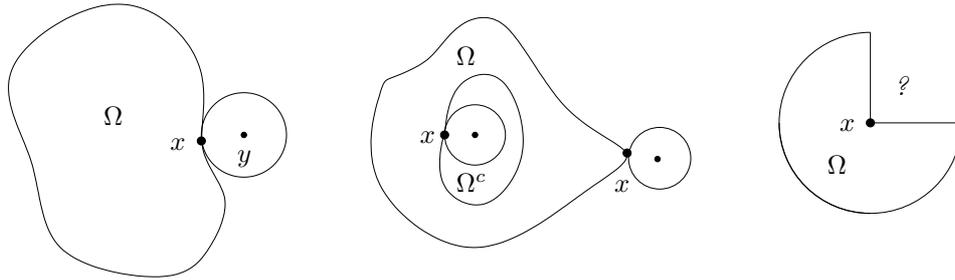
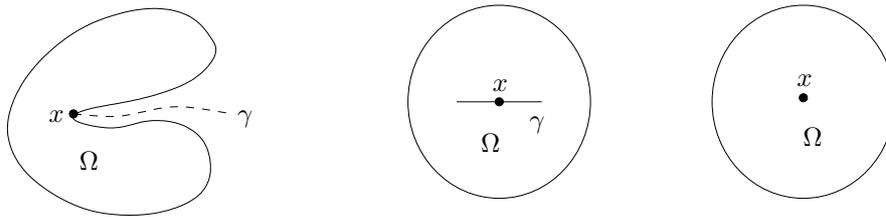


Abbildung 4.7: Zur äußeren Kugelbedingung

Abbildung 4.8: Zur Regularität im Fall $n = 2$

- (2) Der Rand „ $\partial\Omega$ sei von der Klasse C^3 “, d.h., $\partial\Omega$ läßt sich lokal – nach einer geeigneten orthogonalen Koordinatentransformation – als Graph einer C^3 -Funktion schreiben. Ferner gelte $a \in C^3(\partial\Omega)$. Dann gilt $u \in C^2(\bar{\Omega})$, und es gibt eine Konstante $C = C(\Omega) > 0$, so dass

$$\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq C \|a\|_{C^2(\partial\Omega)}$$

erfüllt ist.

Beweis Zum Beweis, der über die in §§4.1 – 4.2 bewiesenen Eigenschaften für (sub-)harmonische Funktionen weit hinausgeht, sei auf die Monographien

D. Gilberg, N.S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer Verlag 1977, 1983

J. Jost: Partielle Differentialgleichungen, Springer Verlag 1998
verwiesen. ■

Bemerkung 4.34 (1) Die im Fall $n = 2$ geforderte Randregularität ist minimal; der Beweis benutzt funktionentheoretische Methoden, die nur für $n = 2$ zur Verfügung stehen.

- (2) Das Dirichlet-Problem (4.39) besitzt für die punktierte Kreisscheibe $\Omega = B_1 \setminus \{0\}$ mit den Randdaten $u = 0$ auf ∂B_1 und $u = 1$ in $x = 0$ keine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$; zum Beweis wende man das schwache Maximumprinzip auf $u(x) + \varepsilon \log |x|$, $\varepsilon \geq 0$, in $B_1 \setminus B_r$, $0 < r \ll 1$, an.
- (3) Die Regularitätsaussage von Satz 4.33 (2) gilt bereits, falls „ $\partial\Omega$ von der Klasse $C^{2,\alpha}$ “, $0 < \alpha < 1$, ist und $a \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ gilt. In diesem Fall genügt u

der *a priori*-Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C \|a\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)}.$$

- (4) Satz 4.33 läßt sich mit Hilfe von §4.1 auf die Lösung des Poisson-Problems $-\Delta u = f$ in Ω , $u = a$ auf $\partial\Omega$ für Daten $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, und $a \in C^0(\partial\Omega)$ bzw. $a \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ verallgemeinern.

Mit Satz 4.33 beweist man die Existenz der Greenschen Funktion $G(x, y)$ zum Dirichlet-Problem in beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und analysiert anschließend ihre Eigenschaften, ohne G genau zu kennen.

Satz 4.35 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, welches die Regularitätsanforderungen an $\partial\Omega$ nach Satz 4.33 (1) erfüllt.*

- (1) *Es gibt genau eine Greensche Funktion $G(\cdot, \cdot)$ zum Dirichlet-Problem von $-\Delta$ auf Ω . Für alle $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$ gilt*

$$\begin{aligned} 0 < G(x, y) < E(x, y) & \quad , \quad n \geq 3 \\ 0 < G(x, y) & \quad , \quad n = 2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

- (2) *Sei $\partial\Omega$ von der Klasse C^3 (oder $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$). Dann ist G symmetrisch, d.h.*

$$G(x, y) = G(y, x) \quad \text{für alle } x, y \in \Omega, \quad x \neq y. \quad (4.41)$$

Ferner gilt für alle $x, y \in \Omega$

$$G(\cdot, y) \in C^2(\bar{\Omega} \setminus \{y\}), \quad G(x, \cdot) \in C^2(\bar{\Omega} \setminus \{x\})$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial N_x} G(x, y) < 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega. \quad (4.42)$$

Beweis

- (1) Nach Satz 4.33 (1) gibt es für jedes feste $x \in \Omega$ eine eindeutig bestimmte Funktion $g(x, \cdot)$ mit den Eigenschaften

$$-\Delta_y g(x, y) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad g(x, y) = E(x - y) \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Dann ist $G(x, y) = E(x - y) - g(x, y)$ die eindeutig bestimmte Greensche Funktion.

Im Fall $n \geq 3$ ist $\inf_{y \in \partial\Omega} E(x - y) > 0$, so dass nach dem schwachen Minimumprinzip $g(x, y) > 0$ für alle $y \in \Omega$ folgt. Also ist $G(x, y) < E(x - y)$.

Nun sei $n \geq 2$ und $x \in \Omega$ fest gewählt. Da $g(x, \cdot) \in C^0(\bar{\Omega})$ und $E(x - y) \rightarrow +\infty$ für $y \rightarrow x$, gilt für alle $r > 0$ genügend klein:

$$G(x, y) = E(x - y) - g(x, y) > 0 \quad \text{für } y \in \partial B_r(x) \subset \Omega.$$

Da außerdem $G(x, \cdot)$ harmonisch in $\Omega \setminus \overline{B_r(x)}$ und $G(x, \cdot) = 0$ auf $\partial\Omega$ ist, folgt mit dem schwachen Minimumprinzip

$$G(x, \cdot) > 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \overline{B_r(x)}.$$

Im Grenzfall $r \rightarrow 0+$ erhält man die Behauptung $G(x, y) > 0$ für alle $y \in \Omega$, $y \neq x$.

- (2) Nach der Regularitätsaussage Satz 4.33 (2) gilt $g(x, \cdot) \in C^2(\overline{\Omega})$, also auch $G(x, \cdot) \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$ für alle $x \in \Omega$. Zum Beweis der Symmetrie schneide man disjunkte Kugeln $B_\varepsilon = B_\varepsilon(x)$ und $B'_\varepsilon = B_\varepsilon(y)$ aus Ω aus und benutze die Greensche Formel auf $\Omega' = \Omega \setminus B_\varepsilon \setminus B'_\varepsilon$. Für $\varepsilon > 0$ genügend klein gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega'} (G(x, z) \cdot \Delta G(y, z) - \Delta G(x, z) \cdot G(y, z)) dz \\ &= \left(\int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B_\varepsilon} + \int_{\partial B'_\varepsilon} \right) \left(G(x, z) \cdot \frac{\partial}{\partial N_z} G(y, z) - \frac{\partial}{\partial N_z} G(x, z) \cdot G(y, z) \right) do_z. \end{aligned} \quad (4.43)$$

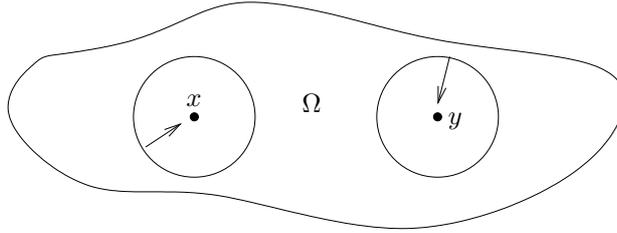


Abbildung 4.9: Zur Anwendung der Greenschen Formel

Auf Grund der Randbedingung an G auf $\partial\Omega$ verschwindet das Integral über $\partial\Omega$. Auf $\partial B_\varepsilon(x)$ gilt $G(x, z) = O(\varepsilon^{2-n})$, $n \geq 3$, bzw. $G(x, z) = O(|\log \varepsilon|)$, $n \geq 2$, während $\frac{\partial}{\partial N_z} G(y, z)$ für $\varepsilon \rightarrow 0+$ beschränkt bleibt. Daraus folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} G(x, z) \cdot \frac{\partial}{\partial N_z} G(y, z) do_z \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Ebenso konvergiert $\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial}{\partial N_z} G(x, z) \cdot G(y, z) do_z$ für $\varepsilon \rightarrow 0+$ gegen 0. Entscheidend ist das Verhalten

$$\frac{\partial}{\partial N_z} G(x, z) = \frac{\partial}{\partial N_z} E(x - z) + O(1) = \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} + O(1)$$

für $z \in \partial B_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \rightarrow 0+$, welches wegen der Stetigkeit von $G(y, z)$ in $z = x$ die Konvergenz

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial N_z} G(x, z) \cdot G(y, z) do_z \rightarrow G(y, x)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0+$ liefert. Analog beweist man, dass das verbleibende Randintegral über $\partial B_\varepsilon(y)$ für $\varepsilon \rightarrow 0+$ gegen $G(x, y)$ konvergiert. Zusammenfassend erhält man aus (4.43) für $\varepsilon \rightarrow 0+$ die Aussage

$$0 = -G(y, x) + G(x, y),$$

also die Symmetrie.

Da $G(x, y)$ für festes $x \in \Omega$ zweimal stetig partiell differenzierbar bzgl. $y \in \Omega \setminus \{x\}$ ist, liefert die Symmetrie, dass G auch bzgl. x von der Klasse C^2 ist. Insbesondere gilt für festes $y \in \Omega$

$$G(x, y) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega, \quad G(x, y) > 0 \quad \text{für } x \in \Omega \setminus \{y\}.$$

Dann beweist Lemma 4.19 angewandt auf $G(\cdot, y)$ in $\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(y)}$ die Aussage $\partial G(x, y) / \partial N_x < 0$ für $x \in \partial\Omega$. ■

Korollar 4.36 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Rand von der Klasse C^3 (oder $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$), sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $a \in C^0(\partial\Omega)$ und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = a \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Dann gilt für $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} a(y) \frac{\partial}{\partial N_y} G(x, y) do_y.$$

5 Die Wärmeleitungsgleichung im \mathbb{R}^n

5.1 Die Fourier-Transformation und Faltungsintegrale auf $L^p(\mathbb{R}^n)$

Definition 5.1 Sei $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Dann ist

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}) : u \text{ ist „messbar“,} \right. \\ \left. \|u\|_p := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Für $p = \infty$ definiert man

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}) : u \text{ ist wesentlich beschränkt,} \\ \|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \};$$

dabei heißt u wesentlich beschränkt, falls es eine Nullmenge $N \subset \Omega$ gibt, so dass $|u|$ auf $\Omega \setminus N$ gleichmäßig beschränkt ist. Bei der Bestimmung des *wesentlichen Supremums* $\operatorname{ess\,sup}$ von $|u|$ werden Nullmengen $N \subset \Omega$ bei der Berechnung des Supremums von $|u|$ nicht berücksichtigt. Man beachte, dass die Norm $\|\cdot\|_\infty$ auch in der Form

$$\|u\|_\infty = \inf \{ K \geq 0 : |u(x)| \leq K \text{ „fast überall“} \}$$

geschrieben werden darf.

Satz 5.2 Für jedes $p \in [1, \infty]$ und für jedes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist $L^p(\Omega)$ ein vollständiger, normierter Vektorraum. Insbesondere gilt die Dreiecksungleichung

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

für alle $u, v \in L^p(\Omega)$.

Satz 5.3 Sei $1 \leq p \leq \infty$, und sei $p' := \frac{p}{p-1}$ ($p' = 1$, falls $p = \infty$, bzw. $p' = \infty$, falls $p = 1$) der zu p konjugierte Exponent. Dann gilt für $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$ stets $uv \in L^1(\Omega)$ und

$$\|u \cdot v\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}. \quad (\text{Hölder-Ungleichung})$$

Satz 5.4 Sei $p \in [1, \infty]$ und $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann konvergiert das sog. Faltungsintegral

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und definiert eine Funktion $u*v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft

$$\|u * v\|_p \leq \|u\|_1 \|v\|_p.$$

Korollar 5.5 Das Faltungsprodukt $*$ aus Satz 5.4 hat die folgenden Eigenschaften:

- (1) $u * v = v * u$ f.ü. (Kommutativität)
für alle $u \in L^1(\mathbb{R}^n), v \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$.
- (2) $(u * v) * w = u * (v * w)$ (Assoziativität)
falls zwei der Funktionen u, v, w in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegen und eine in $L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$, liegt.
- (3) $(u + v) * w = u * w + v * w$ (Distributivgesetz)
für $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n), w \in L^p(\mathbb{R}^n)$ oder $u, v \in L^p(\mathbb{R}^n), w \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definition 5.6 Für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wird die Fourier-Transformierte $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ punktweise für $\xi \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Für eine Funktion $h = h(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wird die Fourier-Rücktransformierte $\check{h} = \mathcal{F}^{-1}h$ punktweise für $x \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\check{h}(x) = \mathcal{F}^{-1}h(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{+ix \cdot \xi} h(\xi) d\xi.$$

- Satz 5.7** (1) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ für $|\xi| \rightarrow \infty$.
 (2) Gilt neben $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sogar $|x|f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist \hat{f} stetig partiell bzgl. ξ differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} = -i(\widehat{x_j f})(\xi), \quad 1 \leq j \leq n.$$

- (3) Gilt $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ sowie $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^n)^n$, so ist

$$\widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi), \quad 1 \leq j \leq n.$$

- (4) Analoge Aussagen gelten auch für die Fourier-Rücktransformation.

Beispiel 5.8 Im \mathbb{R}^1 besitzt die L^1 -Funktion $h(x) = e^{-x^2/2}$ die Fourier-Transformierte $\hat{h}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}$. Insbesondere ist $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}h = h$.

Satz 5.9 Für beliebige Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Satz 5.10 (Umkehrsatz) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\hat{f} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}f = f} \quad f.\ddot{u}.$$

Satz 5.11 Für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sowie

$$\boxed{\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2};$$

dabei wird die Integration von \hat{f} über $\xi \in \mathbb{R}^n$ bzgl. $d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} d\xi$ genommen, d.h.

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx.$$

Bemerkung 5.12 Zu jeder Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine Folge $(f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \rightarrow f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ für $k \rightarrow \infty$, d.h.

$$\|f - f_k\|_2 \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Also gilt nach Satz 5.11

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_j\|_2 = \|f_k - f_j\|_2 \rightarrow 0 \text{ für } k, j \rightarrow \infty.$$

Die Folge $(\hat{f}_k) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ ist also eine Cauchy-Folge, und es gibt nach Satz 5.2 ein $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\hat{f}_k \rightarrow g \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n) \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Deshalb definieren wir die Fourier-Transformierte \hat{f} von $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ durch $g = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Satz 5.13 Die in Bemerkung 5.12 durchgeführte Konstruktion gestattet eine Erweiterung der Fourier-Transformation von $L^1(\mathbb{R}^n)$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Die wieder mit \mathcal{F} bezeichnete Abbildung

$$\mathcal{F} = L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \hat{f},$$

hat die Eigenschaften:

- (1) \mathcal{F} ist linear, stetig und bijektiv, $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = id$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.
- (2) Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\boxed{\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2} \quad (\text{Satz von Plancherel})$$

sowie die Formel von Parseval

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$$

mit $d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} d\xi$.

- (3) Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ lassen sich \hat{f} aus f und f aus \hat{f} als L^2 -Grenzwerte wie folgt berechnen:

$$\int_{B_R} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \rightarrow \hat{f}(\xi) \quad \text{für } R \rightarrow \infty,$$

$$\int_{B_R} \hat{f}(\xi) e^{+ix \cdot \xi} d\vec{\xi} \rightarrow f(x) \quad \text{für } R \rightarrow \infty$$

mit $d\vec{\xi} = \frac{1}{(2\pi)^n} d\xi$.

Korollar 5.14 (1) Sei $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\widehat{\nabla u}(\xi) = i\xi \hat{u}(\xi)$$

sowie $\xi \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\|\xi \hat{u}(\xi)\|_2 = \|\nabla u\|_2$.

- (2) Umgekehrt sei $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann besitzt u partielle Ableitungen 1. Ordnung $\partial_j u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ im folgenden Sinne (sog. schwache Ableitungen):

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \partial_j \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j u \cdot \varphi dx$$

für alle reellwertigen Funktionen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis (2) Zu $\xi_j \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt es nach Satz 5.13(1) ein $v_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{v}_j = i\xi_j \hat{u}$. Dann gilt für alle reellwertigen Funktionen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 5.13 (2)

$$\begin{aligned} \int u \partial_j \varphi dx &= \int u \overline{\partial_j \varphi} dx = \int \hat{u} \overline{\widehat{\partial_j \varphi}} d\vec{\xi} \\ &\stackrel{(1)}{=} \int \hat{u} i \xi_j \overline{\hat{\varphi}} d\vec{\xi} = - \int i \xi_j \hat{u} \overline{\hat{\varphi}} d\vec{\xi} = - \int \hat{v}_j \overline{\hat{\varphi}} d\vec{\xi} \stackrel{(1)}{=} - \int v_j \varphi dx. \end{aligned}$$

Eine Funktion v_j mit dieser Eigenschaft ist eindeutig bestimmt. ■

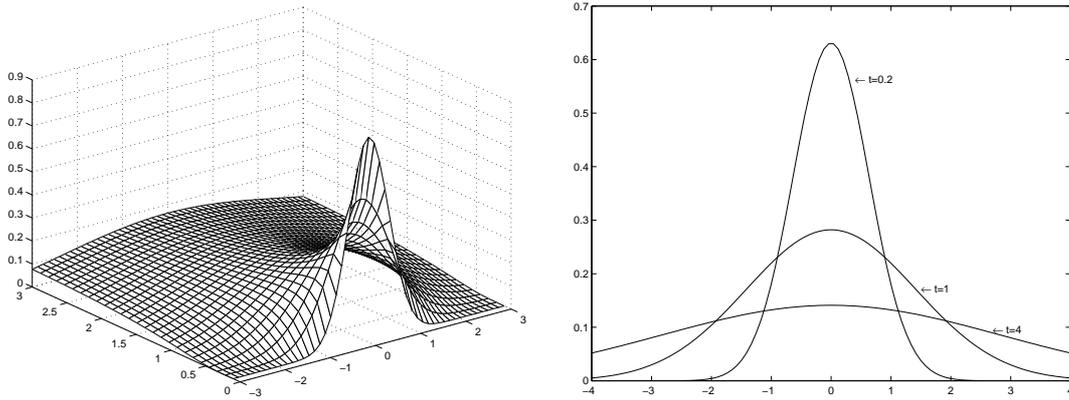
5.2 Der Wärmeleitungskern

Zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - k \Delta u &= 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0) &= u_0 & \text{für } t = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

wird eine (formale) Fourier-Transformation bzgl. $x \in \mathbb{R}^n$ durchgeführt. Aus (5.1) erhält man die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\hat{u}_t + k|\xi|^2 \hat{u} = 0, \quad \hat{u}(0) = \hat{u}_0$$

Abbildung 5.1: Der Wärmeleitungskern $E(t, x)$ im \mathbb{R}^1

bzgl. t mit Parameter $\xi \in \mathbb{R}^n$ und Anfangswert $\hat{u}_0(\xi)$. Die eindeutig bestimmte Lösung lautet

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-k|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi),$$

also nach Satz 5.9

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-k|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi))(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-k|\xi|^2 t}) * u_0(x). \quad (5.2)$$

Zur Berechnung von $\mathcal{F}^{-1}(e^{-k|\xi|^2 t})$ benutzen wir Beispiel 5.8 wie folgt: für jedes $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt punktweise

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(e^{-k|\xi|^2 t})(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \dots \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_1 x_1} e^{-k\xi_1^2 t} d\xi_1 \right) \dots e^{i\xi_n x_n} e^{-k\xi_n^2 t} d\xi_n \\ &= \mathcal{F}_1^{-1}(e^{-k\xi_1^2 t})(x_1) \cdot \dots \cdot \mathcal{F}_n^{-1}(e^{-k\xi_n^2 t})(x_n) \end{aligned}$$

mit der Fourier-Rücktransformation \mathcal{F}_j^{-1} , $1 \leq j \leq n$, über \mathbb{R}^1 . Nach Beispiel 5.8 und einer Anwendung der Substitutionsregel ist z.B. für $j = 1$

$$\mathcal{F}_1^{-1}(e^{-k\xi_1^2 t})(x_1) = \mathcal{F}_1^{-1}\left(e^{-(\sqrt{2kt}\xi_1)^2/2}\right)(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2kt}} e^{-(x_1/\sqrt{2kt})^2/2},$$

woraus schließlich

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-k|\xi|^2 t})(x) = \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}$$

folgt. Wir definieren jetzt den *Wärmeleitungskern*

$$\boxed{E(t, x) = \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}.} \quad (5.3)$$

Damit erhält man die formale Lösung

$$\boxed{u(t, x) = E(t, \cdot) * u_0(x) = \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}} u_0(y) dy} \quad (5.4)$$

von (5.1).

Satz 5.15 *Der Wärmeleitungskern $E(t, x)$ im \mathbb{R}^n besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(1) $E(t, x)$ ist unendlich oft stetig partiell differenzierbar in den Variablen $t > 0$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Darüber hinaus ist E sogar reell analytisch in t, x_1, \dots, x_n , d.h., E läßt sich als $(n+1)$ -fache konvergente Potenzreihe bzgl. t, x_1, \dots, x_n mit beliebigem Entwicklungspunkt $t_0 > 0$, $x_{01}, \dots, x_{0n} \in \mathbb{R}$ schreiben.

(2) $E(t, x) > 0$ für alle $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(3) Für $t \rightarrow 0+$ gilt

$$E(t, x) \rightarrow \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}.$$

(4) $\int_{\mathbb{R}^n} E(t, x) dx = 1$ für alle $t > 0$.

(5) Bezüglich der Faltung in der Ortsvariablen x gilt

$$\boxed{E(t, \cdot) * E(s, \cdot) = E(t+s, \cdot)} \quad \text{für alle } t, s > 0.$$

(6) Für jedes $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\partial_t E = k \Delta E.$$

Beweis Die Eigenschaften (1) – (4) und (6) (bis auf die reelle Analytizität) sind trivial und ergeben sich aus der Definition. Die Normierungsbedingung (4) folgt auch aus der Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(t, x) dx = \mathcal{F}(E(t, \cdot))(\xi = 0) = e^{-k|\xi|^2 t} \Big|_{\xi=0} = 1.$$

Die Faltungsidentität in (5) läßt sich explizit nachrechnen, folgt aber auch aus der Funktionalgleichung

$$e^{-k|\xi|^2 t} e^{-k|\xi|^2 s} = e^{-k|\xi|^2 (t+s)}$$

und der Formel $\mathcal{F}^{-1}(\hat{u} \hat{v}) = u * v$, s. Satz 5.9. ■

5.3 Existenz von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Satz 5.16 Sei $u_0 \in BC^0(\mathbb{R}^n) = C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, also ein stetiger beschränkter Anfangswert. Dann ist

$$u(t, x) = E(t, \cdot) * u_0, \quad \text{kurz } u(t) = E(t)u_0,$$

eine unendlich oft stetig partiell differenzierbare und sogar reell-analytische Funktion auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, die das Anfangswertproblem (5.1) löst. Dabei gilt $u(0) = u_0$ im Sinne

$$u(t, x) \rightarrow u_0(x_0) \quad \text{für } (t, x) \rightarrow (0, x_0), \quad t > 0. \quad (5.5)$$

Beweis Wir beweisen, dass $u(t) = E(t)u_0$ nach x_1 partiell differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} E(t, \cdot) \right) * u_0(x) \quad (5.6)$$

ist; analoge Ergebnisse gelten für $\partial_2, \dots, \partial_n$, für $\partial/\partial t$ und für partielle Ableitungen höherer Ordnung. Insbesondere folgt

$$(\partial_t - \Delta)u(t, x) = (\partial_t - \Delta_x E(t, \cdot)) * u_0 = 0$$

mit Hilfe von Satz 5.15(6). Zum Beweis von (5.6) betrachten wir der Einfachheit halber nur den eindimensionalen Fall, also $x = x_1$, und $k = 1$. Es sei

$$f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/4t},$$

so dass nach zweimaliger Anwendung des Mittelwertsatzes für $h \neq 0$

$$\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) - f'(x) = f'(x + \theta h) - f'(x) = \theta h f''(x + \theta' h)$$

mit $0 < \theta, \theta' < 1$ gilt. Wegen $f''(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}\right) e^{-x^2/4t}$ und der elementaren Ungleichung

$$\frac{x^2}{4t} e^{-x^2/4t} = 2 \cdot \frac{x^2}{8t} e^{-x^2/8t} \cdot e^{-x^2/8t} \leq C e^{-x^2/8t},$$

die aus $ye^{-y} \leq C$ für $y \geq 0$ folgt, genügt f'' für $|h| < 1$ der Abschätzung

$$\begin{aligned} |f''(x + \theta' h)| &\leq \frac{C}{t^{3/2}} e^{-(x+\theta' h)^2/8t} \leq \frac{C}{t^{3/2}} e^{-x^2/8t} e^{h|x|/4t} \\ &\leq \frac{C}{t^{3/2}} e^{-x^2/8t} e^{x^2/16t} e^{4h^2/t} \leq C(t) e^{-x^2/16t}; \end{aligned}$$

dabei wurde in der vorletzten Ungleichung $\frac{|h||x|}{4t} \leq \frac{x^2}{16t} + \frac{h^2}{4t}$ ausgenutzt. Man beachte ferner, dass die Konstante $C(t)$ von θ' , h und x unabhängig ist. Nun folgt für festes $t > 0$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h} (u(t, x+h) - u(t, x)) - \left(\frac{\partial}{\partial x} E(t, \cdot) \right) * u_0(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{h} (f(x+h-y) - f(x-y)) - f'(x-y) \right) u_0(y) dy \right| \\ &\leq C(t) \int_{\mathbb{R}} |h| e^{-(x-y)^2/16t} |u_0(y)| dy \\ &\leq |h| C(t) \|u_0\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/16t} dy \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Also ist $u(t, x)$ bzgl. x differenzierbar, die Ableitung lautet $\frac{\partial}{\partial x} E(t, \cdot) * u_0(x)$. Aus der reellen Analytizität von E , s. Satz 5.15 (1), folgt – ohne Beweis (!) – die reelle Analytizität von $u(t, x)$.

Zum Beweis von (5.5) sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ gewählt. Da u_0 in x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|u_0(y) - u_0(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{falls } |y - x_0| < 2\delta.$$

Für $x \in B_{\delta}(x_0)$ erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} |u(t, x) - u_0(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} E(t, x-y) (u_0(y) - u_0(x_0)) dy \right| \\ &\leq \int_{|y-x| < \delta} E(t, x-y) |u_0(y) - u_0(x_0)| dy \\ &\quad + \int_{|y-x| > \delta} E(t, x-y) |u_0(y) - u_0(x_0)| dy, \end{aligned}$$

da nach Satz 5.15 $E(t, \cdot) > 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} E(t, x) dx = 1$ für alle $t > 0$ gilt. Aus $x \in B_{\delta}(x_0)$ und $y \in B_{\delta}(x)$ folgt $|y - x_0| < 2\delta$, so dass das erste Integral auf der rechten Seite durch

$$\int_{|y-x| < \delta} E(t, x-y) \frac{\varepsilon}{2} dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

beschränkt ist. Das zweite Integral wird durch

$$\int_{|y-x| > \delta} E(t, x-y) 2\|u_0\|_{\infty} dy = \frac{2\|u_0\|_{\infty}}{\pi^{n/2}} \int_{|z| \geq \frac{\delta}{\sqrt{4kt}}} e^{-|z|^2} dz$$

abgeschätzt; es ist also kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$, falls $0 < t < \delta' = \delta'(\delta, u_0)$ ist. Insgesamt folgt

$$|u(t, x) - u_0(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $|x - x_0| < \delta = \delta(\varepsilon)$ und $0 < t < \delta'$. ■

Korollar 5.17 (1) In Satz 5.16 ist die Konvergenz $u(t, x) \rightarrow u_0(x_0)$ sogar gleichmäßig bezüglich $x_0 \in \mathbb{R}^n$, falls $u \in BUC(\mathbb{R}^n)$ gilt, d.h., falls $u \in BC(\mathbb{R}^n)$ sogar gleichmäßig stetig ist.

(2) Satz 5.16 gilt sogar, wenn $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n)$ der Wachstumsabschätzung

$$|u_0(x)| \leq ce^{M|x|}, \quad x > 0, \quad M \in \mathbb{R},$$

genügt.

Beweis

(1) folgt aus einer Inspektion des 2. Beweisteils von Satz 5.16.

(2) Wegen

$$|u_0(y)| \leq ce^{M|y|} \leq ce^{M|x|} e^{M|y-x|} \leq C_\varepsilon(x) e^{\varepsilon|y-x|^2}$$

für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ bleibt der Beweis von Satz 5.16 auch bei der Wachstumsabschätzung aus (2) gültig. ■

Bemerkung 5.18 Die Lösung $u(t) = E(t)u_0$ hat die folgenden Eigenschaften:

(1) Wegen $E(t, \cdot) > 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} E(t, x) dx = 1$ gilt das sog. *schwache Maximum- und Minimumprinzip*

$$\inf u_0 \leq u(t, x) \leq \sup u_0 \quad \text{auf } [0, \infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Während für einen konstanten Anfangswert u_0 die Lösung $u \equiv u_0$ lautet, gilt für jeden nichtkonstanten Anfangswert u_0 nach Satz 5.15 (2), (4) sogar

$$\inf u_0 < u(t, x) < \sup u_0 \quad \text{auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Falls umgekehrt $u(t, x) = \inf u_0$ oder $u(t, x) = \sup u_0$ in einem Punkt (t, x) mit $t > 0$ gilt, ist $u = u_0$ konstant (*starkes Maximum- und Minimumprinzip*).

(2) Für alle $t > 0$ ist $u(t, x)$ eine unendlich oft stetig partiell differenzierbare Funktion bzgl. x , auch wenn u_0 nur stetig ist oder sogar nur in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt. Im Fall $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$u(t, x) \rightarrow u_0(x_0) \quad \text{für } t \rightarrow 0+, \quad x \rightarrow x_0$$

nur, falls die Punktauswertung $u_0(x_0)$ sinnvoll ist und u_0 in einer Umgebung von x_0 f.ü. mit einer stetigen Funktion übereinstimmt. Andernfalls wird der Anfangswert $u(0) = u_0$ in der sog. *schwachen Form* angenommen: für jede Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \varphi(t, x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \varphi(x) dx$$

für $t \rightarrow 0+$, wobei $\varphi(t, x) = E(t, \cdot) * \varphi(x)$ die Lösung der Wärmeleitungsgleichung (5.1) mit Anfangswert φ bezeichnet. Zum Beweis benutzt man die aus dem Satz von Fubini folgende Identität

$$\int_{\mathbb{R}^n} (E_t * u_0)(x) \varphi(x) dx = \int u_0(x) (E_t * \varphi)(x) dx.$$

- (3) Der Lösungsoperator $u_0 \mapsto E(t)u_0$ hat also eine stark regularisierende Wirkung; nicht differenzierbare Stellen von u_0 und sogar Unstetigkeiten von u_0 werden für jedes noch so kleine $t > 0$ weggeglättet!
- (4) Wegen $E(t, x) > 0$ für alle $t > 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ beeinflussen die Funktionswerte von u_0 in $B_\varepsilon(x_0)$ die Lösung $u(t, x)$ für jedes $t > 0$ und in jedem $x \in \mathbb{R}^n$. Im Gegensatz zu den bei der Wellengleichung besprochenen Phänomenen besitzen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung eine *unendlich große Ausbreitungsgeschwindigkeit*. Insofern ist die Wärmeleitungsgleichung kein realistisches Modell der Wärmeausbreitung.
- (5) Der Lösungsoperator

$$E(t) : BC^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow BC^0(\mathbb{R}^n), \quad u_0 \mapsto E(t)u_0,$$

ist für jedes $t > 0$ ein linearer, stetiger Operator, wenn $BC^0(\mathbb{R}^n)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen wird: für alle $u_0, v_0 \in BC^0(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|E(t)u_0 - E(t)v_0\|_\infty = \|E(t)(u_0 - v_0)\|_\infty \leq \|u_0 - v_0\|_\infty.$$

Ferner besitzt $E(\cdot)$ wegen $E(t, \cdot) * E(s, \cdot) = E(t + s, \cdot)$ die *Halbgruppeneigenschaft*

$$\begin{aligned} E(t)E(s) &= E(t + s) \quad \text{für alle } t, s \geq 0, \\ E(0) &= id. \end{aligned}$$

Auf dem mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehenen Raum $BUC(\mathbb{R}^n)$ ist $E(\cdot)$ nach Korollar 5.17 (1) sogar im folgenden Sinne *stark stetig*:

$$\begin{aligned} E(t)u_0 &\rightarrow E(t_0)u_0 && \text{für } t \rightarrow t_0, t_0 > 0, \\ E(t)u_0 &\rightarrow u_0 && \text{für } t \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Unter Vorwegnahme der Eindeutigkeit der Lösung, s. Satz 5.23, stellt die Wärmeleitungsgleichung also ein wohlgestelltes Problem im Raum $BUC(\mathbb{R}^n)$ dar.

Das Anfangswertproblem (5.1) kann mit Hilfe der Formel $u(t, x) = E(t, \cdot) * u_0(x) = E(t)u_0$ und von Satz 5.4 auch für Anfangswerte $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ betrachtet werden.

Satz 5.19 Sei ein Anfangswert $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, gegeben. Dann ist $u(t) = E(t)u_0$ eine unendlich oft bzgl. $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ differenzierbare Funktion, die das Anfangswertproblem (7.1) im Sinne

$$u(t, \cdot) \rightarrow u_0 \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } t \rightarrow 0+ \quad (5.7)$$

löst. Ferner gilt

$$u(t, \cdot) \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad \|u(t, \cdot)\|_p \leq \|u_0\|_p \quad \text{für alle } t > 0. \quad (5.8)$$

Beweis Aus $0 < E(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} E(t, x) dx = 1$ folgen mit Satz 5.4 die Aussage $u(t, \cdot) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und die Abschätzung

$$\|u(t, \cdot)\|_p = \|E(t, \cdot) * u_0\|_p \leq \|E(t, \cdot)\|_1 \|u_0\|_p = \|u_0\|_p.$$

Zum Beweis der Differenzierbarkeit betrachten wir exemplarisch die Ableitung $\partial_1 = \partial/\partial x_1$ und nutzen aus, dass u_0 beliebig gut in der L^p -Norm durch $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen approximiert werden kann: zu $k \in \mathbb{N}$ gibt es $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|u_0 - \varphi_k\|_p < \frac{1}{k}. \quad (5.9)$$

Nach Satz 5.16 ist die Lösung $E(t)\varphi_k$ unendlich oft differenzierbar in $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$, und es gilt z.B.

$$\partial_1(E(t)\varphi_k)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1} E(t, x-y) \varphi_k(y) dy.$$

Dabei ist

$$\partial_{x_1} E(t, x-y) = \frac{-(x_1 - y_1)/2kt}{(4\pi kt)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}$$

und genügt der Abschätzung

$$|\partial_{x_1} E(t, x-y)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{8kt}},$$

da $\frac{|x_1 - y_1|}{\sqrt{t}} e^{-|x-y|^2/8kt}$ gleichmäßig beschränkt ist. Insbesondere gilt mit $p' = \frac{p}{p-1}$

$$\|\partial_{x_1} E(t, \cdot)\|_{p'} \leq C(t)$$

mit einer Funktion $C : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ (man kann $C(t) = c_0 t^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2p}}$ wählen). Analog erhält man

$$\|E(t, \cdot)\|_{p'} + \|\partial_t E(t, \cdot)\|_{p'} + \|\nabla^2 E(t, \cdot)\|_{p'} \leq C(t).$$

Mit der Hölder-Ungleichung (Satz 5.3) folgt

$$\begin{aligned} |E(t)u_0(x) - E(t)\varphi_k(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} E(t, x-y) |u_0(y) - \varphi_k(y)| dy \\ &\leq \|E(t, \cdot)\|_{p'} \|u_0 - \varphi_k\|_p \\ &\leq C(t) \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

also die *gleichmäßige* Konvergenz der Funktionenfolge $(E(t)\varphi_k)_k$ gegen $E(t)u_0$; insbesondere ist $E(t)u_0$ für jedes $t > 0$ stetig. Da $\partial_1(E(t)u_0) = (\partial_1 E(t, \cdot)) * u_0$ gelten soll, leiten wir zuerst die Abschätzung

$$|(\partial_1 E(t, \cdot) * u_0 - \partial_1 E(t, \cdot) * \varphi_k)(x)| \leq C(t) \frac{1}{k}$$

analog her. Die Funktionenfolge der Ableitungen $(\partial_1 E(t, \cdot) * \varphi_k)_k = \partial_1(E(t)\varphi_k)_k$ konvergiert also gleichmäßig gegen die Funktion $\partial_1 E(t, \cdot) * u_0$. Daraus folgt mit Standardargumenten der Analysis, dass $E(t)u_0$ partiell nach x_1 differenzierbar ist, und dass

$$\partial_1(E(t, \cdot) * u_0) = \partial_1 E(t, \cdot) * u_0$$

gilt. Analoge Aussagen gelten für $\partial_2, \dots, \partial_n$ und für die Zeitableitung ∂_t . Da diese ersten Ableitungen stetig sind, ist $u(t, x)$ sogar stetig partiell differenzierbar. Höhere Ableitungen werden analog behandelt.

Zum Beweis der Aussage (5.7) benutzen wir wieder (5.9) und folgern mit (5.8) und der Dreiecksungleichung für die L^p -Norm, s. Satz 5.2,

$$\begin{aligned} \|E(t)u_0 - u_0\|_p &\leq \|E(t)(u_0 - \varphi_k)\|_p + \|E(t)\varphi_k - \varphi_k\|_p + \|\varphi_k - u_0\|_p \\ &\leq 2\|u_0 - \varphi_k\|_p + \|E(t)\varphi_k - \varphi_k\|_p \\ &\leq \frac{2}{k} + \|E(t)\varphi_k - \varphi_k\|_p. \end{aligned}$$

Wählt man zu $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \frac{4}{\varepsilon}$, bleibt für $\varphi = \varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\|E(t)\varphi - \varphi\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } 0 < t < \delta' \quad (5.10)$$

für ein geeignetes $\delta' > 0$ zu zeigen. Dazu benutzen wir wieder Satz 5.15(2), (4) und schätzen mit der Hölder-Ungleichung wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \|E(t)\varphi - \varphi\|_p^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} E(t, y) |\varphi(x-y) - \varphi(x)| dy \right)^p dx \\ &= \int \left(\underbrace{\int E(t, y)^{1/p'}}_{p'} \underbrace{E(t, y)^{1/p} |\varphi(x-y) - \varphi(x)|}_{p} dy \right)^p dx \\ &\leq \int \left(\underbrace{\left(\int E(t, y) dy \right)^{p/p'}}_{=1} \int E(t, y) |\varphi(x-y) - \varphi(x)|^p dy \right) dx \\ &= \int E(t, y) \left(\int |\varphi(x-y) - \varphi(x)|^p dx \right) dy. \end{aligned}$$

Das letzte Integral über $y \in \mathbb{R}^n$ wird aufgespalten in die Anteile über $y \in B_\delta$ und über $y \notin B_\delta$ mit einem geeigneten $\delta > 0$. Da $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ einen kompakten Träger hat und folglich gleichmäßig stetig ist, findet man zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\int |\varphi(x-y) - \varphi(x)|^p dx < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p \quad \text{für alle } y \in B_\delta.$$

Für den Anteil $y \notin B_\delta$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{|y|>\delta} E(t, y) \|\varphi(\cdot - y) - \varphi\|_p^p dy &\leq (2\|\varphi\|_p)^p \int_{|y|>\delta} E(t, y) dy \\ &= \frac{(2\|\varphi\|_p)^p}{\pi^{n/2}} \int_{|z|>\frac{\delta}{4kt}} e^{-|z|^2} dz \leq \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p, \end{aligned}$$

falls $0 < t < \delta'$ mit einem geeigneten $\delta' > 0$ erfüllt ist. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \|E(t)\varphi - \varphi\|_p^p &\leq \left(\int_{y \in B_\delta} + \int_{y \notin B_\delta} \right) E(t, y) \left(\int |\varphi(x - y) - \varphi(x)|^p dx \right) dy \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p \int_{y \in B_\delta} E(t, y) dy + \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p \\ &\leq 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p \end{aligned}$$

und folglich (5.10). Damit ist (5.7) bewiesen. \blacksquare

Als Beispiel einer *inhomogenen Wärmeleitungsgleichung* betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t - k\Delta u &= f(t, x) \quad \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Nach Duhamel's Prinzip, vgl. §3.4 zur Wellengleichung, kann man die Lösung in der Form $u(t, \cdot) = \int_0^t U(t, s, \cdot) ds$ gewinnen, wobei $U(t, s, \cdot)$ die Wärmeleitungsgleichung

$$U_t - k\Delta U = 0, \quad U(s, s, \cdot) = f(s, \cdot)$$

löst. Nach Satz 5.16 oder Satz 5.19 ist

$$U(t, s, \cdot) = E(t - s)f(s, \cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} E(t - s, x - y) f(s, y) dy$$

eine Lösung, woraus

$$u(t, x) = \int_0^t E(t - s, \cdot) * f(s, \cdot)(x) ds \tag{5.12}$$

folgt. Eine formale Rechnung zeigt, dass u (5.11) löst. Ein Problem entsteht jedoch z.B. bei der Zeitableitung

$$\int_0^t \partial_t E(t - s, \cdot) * f(s, \cdot)(x) ds \approx \int_0^t \frac{1}{t - s} (\dots) ds,$$

welche ein singuläres Integral liefert. Unter geeigneten Voraussetzungen an f erhält man den folgenden Satz, den wir nicht beweisen wollen.

Satz 5.20 Sei $f \in BC(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^n)$ lokal Hölder-stetig bzgl. x , d.h., es gibt ein $\delta > 0$ und zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ ein $c = c(K)$ mit

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq c|x - y|^\delta \quad \text{für alle } x, y \in K \text{ und } t \geq 0.$$

Dann löst u aus (5.12) die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - k\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \quad u(0) = 0.$$

5.4 Das Maximumprinzip und die Eindeutigkeit von Lösungen

Satz 5.21 (Schwach Maximumprinzip) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $T > 0$, $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$ und sei

$$u \in C^0(\overline{\Omega_T}) \quad \text{mit} \quad u_t \in C^0(\Omega_T), \quad \nabla^2 u \in C^0(\Omega_T)$$

gegeben ($\nabla^2 u \in C^0(\Omega_T)$ bedeutet $\partial_i \partial_j u \in C^0(\Omega_T)$ für alle $1 \leq i, j \leq n$). Erfüllt u die Ungleichung

$$u_t - k\Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T,$$

gilt

$$\boxed{\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\partial_p \Omega_T} u,} \quad (5.13)$$

wobei

$$\partial_p \Omega_T = \{(t, x) \in \overline{\Omega_T} : t = 0 \text{ oder } x \in \partial\Omega\} = (\{0\} \times \overline{\Omega}) \cup ([0, T] \times \partial\Omega)$$

den parabolischen Rand von Ω_T bezeichnet.

Beweis Im ersten Teil des Beweises gelte sogar

$$u_t - k\Delta u < 0 \quad \text{in } \Omega_T.$$

Dann nimmt u für jedes $\varepsilon \in (0, T)$ sein Maximum in $\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}$ in einem Punkt $(t, x) \in \overline{\Omega_{T-\varepsilon}}$ an. Falls (t, x) ein innerer Punkt von $\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}$ wäre, gilt in $(t, x) \in \Omega_{T-\varepsilon}$

$$u_t(t, x) = 0 \quad \text{und} \quad \Delta u(t, x) \leq 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $(u_t - k\Delta u)(t, x) < 0$. Wäre $t = T - \varepsilon$, würde $u_t(t, x) \geq 0$ und wie zuvor $\Delta u(t, x) \leq 0$ gelten, woraus wieder ein Widerspruch zu $(u_t - k\Delta u)(t, x) < 0$ folgen würde. Also liegt (t, x) auf dem parabolischen Rand, und es gilt

$$\max_{\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}} u = \max_{\partial_p \Omega_{T-\varepsilon}} u \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u \quad \text{für alle } \varepsilon \in (0, T).$$

Da u stetig auf $\overline{\Omega_T}$ ist, folgt für $\varepsilon \rightarrow 0+$ die Behauptung.

Nun gelte $u_t - k\Delta u \leq 0$ in Ω_T . Statt u betrachte man die Funktion

$$v = u - \varepsilon t, \quad \varepsilon > 0,$$

für die

$$v_t - k\Delta v = u_t - k\Delta u - \varepsilon < 0 \quad \text{in } \Omega_T$$

gilt. Nach dem ersten Teil des Beweises folgt

$$\max_{\overline{\Omega_T}}(u - \varepsilon t) = \max_{\partial_p \Omega_T}(u - \varepsilon t) \leq \max_{\partial_p \Omega_T} u.$$

Im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0+$ erhält man die Behauptung. ■

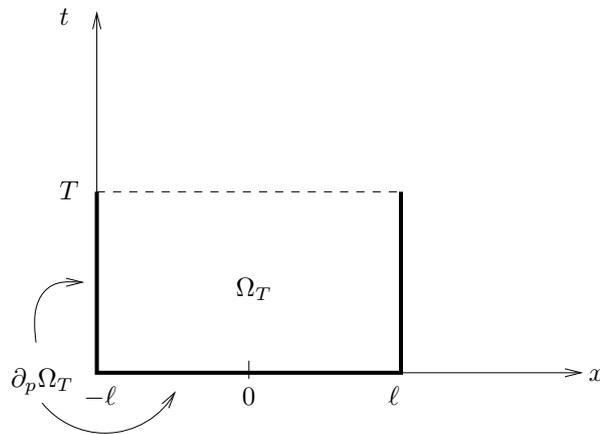


Abbildung 5.2: Der parabolische Rand $\partial_p \Omega_T$ für $\Omega = (-\ell, \ell) \subset \mathbb{R}^1$

Korollar 5.22 (A priori-Abschätzungen und Eindeutigkeit in beschränkten Gebieten) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, und sei $u \in C^0(\overline{\Omega_T})$ mit $\partial_t u, \nabla^2 u \in C^0(\Omega_T)$ eine Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{aligned} u_t - k\Delta u &= f && \text{in } \Omega_T \\ u(0) &= u_0 && \text{für } t = 0 \\ u &= g && \text{auf } (0, T) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $f \in C^0(\overline{\Omega_T})$, $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ und $g \in C^0([0, T] \times \partial\Omega)$. Dann gilt die a priori-Abschätzung

$$\|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \|g\|_\infty + T\|f\|_\infty. \quad (5.14)$$

Insbesondere ist u eindeutig durch die Daten f, u_0 und g bestimmt.

Beweis Die Funktion $w_{\pm} = \pm u - t\|f\|_{\infty}$ genügt den Voraussetzungen von Satz 5.21; insbesondere gilt

$$(w_{\pm})_t - k\Delta w_{\pm} = \pm f - \|f\|_{\infty} \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T.$$

Also liefert Satz 5.21 die Abschätzung

$$(\pm u - t\|f\|_{\infty})(t, x) \leq \|u_0\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$$

und damit (5.14). Auf Grund der Linearität des Problems reicht es, zum Beweis der Eindeutigkeit den Fall $f = 0$, $u_0 = 0$, $g = 0$ zu betrachten. In diesem Fall liefert (5.14) jedoch sofort die Eindeutigkeit $u = 0$. ■

Das schwache Maximumprinzip (Satz 5.21) führt in Korollar 5.22 zur Eindeutigkeitsaussage für die Wärmeleitungsgleichung in beschränkten Gebieten. Zusammen mit einer weiteren Bedingung, einer Wachstumsabschätzung für $|x| \rightarrow \infty$, werden wir daraus die Eindeutigkeit für $\Omega = \mathbb{R}^n$ ableiten.

Satz 5.23 (Schwach Maximumprinzip und Eindeutigkeit für $\Omega = \mathbb{R}^n$)

Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und sei $u \in C^0(\overline{\Omega_T})$ mit $u_t, \nabla^2 u \in C^0(\Omega_T)$ und

$$u_t - k\Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$$

gegeben. Ferner gelte die bzgl. $t \in [0, T)$ gleichmäßige Abschätzung

$$u(t, x) \leq Me^{a|x|^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \quad (5.15)$$

mit Konstanten $M, a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\boxed{\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Omega} u(0, \cdot)}. \quad (5.16)$$

Insbesondere ist eine Lösung u der Wärmeleitungsgleichung im \mathbb{R}^n innerhalb der Funktionenklasse

$$C_{M,a}^0(\overline{\Omega_T}) = \{u \in C^0(\overline{\Omega_T}) : \text{es gibt } M, a \in \mathbb{R} : |u(t, x)| \leq Me^{a|x|^2} \text{ in } \mathbb{R}^n\}$$

eindeutig.

Beweis Um in (5.15) mit exponentiell anwachsenden Termen ($a > 0$) arbeiten zu können, wird die Funktion

$$\tilde{E}(t, x) = \frac{1}{(4\pi k(2T - t))^{n/2}} \exp\left(+\frac{|x|^2}{4k(2T - t)}\right)$$

für $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < t < 2T$, benutzt. Da $\tilde{E}(t, x_1, \dots, x_n) = E(2T - t, ix_1, \dots, ix_n)$ gilt, erkennt man \tilde{E} sofort als Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $(0, 2T)$. Zur

Anwendung von Satz 5.21 betrachten wir für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ die Kugel $G = B_\rho(y)$, $\rho > |y| > 0$, sowie im Raum-Zeit-Zylinder $G_T = (0, T) \times G$ die Funktion

$$v_\mu(t, x) = u(t, x) - \mu \tilde{E}(t, x) \quad \text{mit } \mu > 0.$$

Da $(\partial_t - k\Delta)v_\mu \leq 0$ in G_T gilt, liefert Satz 5.21 die Aussage

$$\max_{\overline{G_T}} v_\mu = \max_{\partial_p G_T} v_\mu.$$

Dabei gelten für v_μ auf $\partial_p G_T$ die Ungleichungen

$$v_\mu(0, x) \leq u(0, x) \quad \text{für } x \in G$$

sowie für $x \in \partial G$, $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} v_\mu(t, x) &\leq M e^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(4\pi k(2T-t))^{n/2}} \exp \frac{|x|^2}{4k(2T-t)} \\ &\leq M e^{a(|y|+\rho)^2} - \frac{\mu}{(8\pi kT)^{n/2}} \exp \frac{(\rho-|y|)^2}{8kT}. \end{aligned}$$

Ist jetzt

$$a < \frac{1}{8kT}$$

erfüllt und wählt man $\rho = \rho(a, y, T, \mu, M)$ genügend groß, folgen die Abschätzungen $\max_{\partial_p G_T} v_\mu \leq \max_{\overline{G}} u(0, x)$ und mit Satz 5.21

$$\max_{\overline{G_T}} v_\mu \leq \max_{\Omega} u(0, \cdot).$$

Im Limes $\mu \rightarrow 0+$ ersieht man daraus die Behauptung (5.16). Falls die Annahme $a < \frac{1}{8kT}$ nicht erfüllt ist, folgt mit einer Zahl $\tau \in (0, \frac{1}{8ka})$ in endlich vielen Schritten aus

$$u(t, x) \leq \max_{\Omega} u(t - \tau, \cdot) \leq \dots \leq \max_{\Omega} u(0, \cdot)$$

die erste Behauptung (5.16).

Ist $u \in C_{M,a}^0(\overline{\Omega_T})$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, gilt (5.16) für $\pm u$. Daraus folgt im Fall $u_0 = 0$ sofort $u \equiv 0$. ■

6 Trennung der Variablen – Beispiele

Beispiel 6.1 Gesucht wird die Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Aufgrund der Geometrie des Quadrats Ω ist es naheliegend, Lösungen in der Form

$$u(x, y) = X(x)Y(y), \quad (6.2)$$

d. h. mit „getrennten Variablen“, zu suchen. Setzt man eine solche Funktion u in (6.1) ein, erhält man

$$-X''(x)Y(y) - X(x)Y''(y) = 0$$

und folglich

$$-\frac{X''}{X}(x) = \frac{Y''}{Y}(y).$$

Da die linke Seite eine Funktion in x ist, die rechte Seite aber eine Funktion in y , müssen beide Seiten gleich einer Konstanten sein. Es gibt also eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$-X'' = \lambda X \quad \text{in } (0, 1), \quad -Y'' = -\lambda Y \quad \text{in } (0, 1), \quad (6.3)$$

so dass X und Y Eigenfunktionen des Differentialoperators $-\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ zum Eigenwert λ bzw. $-\lambda$ sind.

Konkret betrachten wir in (6.1) einen stetigen Randwert g auf $\partial\Omega$ mit $g = 0$ für $x = 0$ und $x = 1$, aber

$$g(x, 0) = 0, \quad g(x, 1) = f(x), \quad (6.4)$$

so dass f die Kompatibilitätsbedingung $f(0) = f(1)$ erfüllt. Dann muss auch $X(0) = X(1) = 0$ gelten. Daraus folgern wir, dass X das *Eigenwertproblem*

$$-X'' = \lambda X \quad \text{in } (0, 1), \quad X(0) = X(1) = 0, \quad (6.5)$$

löst. Die allgemeine Lösung von (6.5) ist - ohne Berücksichtigung der Randwerte - Linearkombination der Funktionen $e^{\sqrt{-\lambda}x}$ und $e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, oder in anderer Schreibweise, Linearkombination der Funktionen $\cos\sqrt{\lambda}x$ und $\sin\sqrt{\lambda}x$. Aufgrund der Randbedingungen besitzt (6.5) nur für die Werte

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine nichttriviale Lösung, nämlich

$$X_n(x) = \sin n\pi x.$$

Wegen $\lambda_n = n^2\pi^2$, (6.3) und (6.4), muss Y dann die Gleichung

$$-Y'' = -n^2\pi^2 Y, \quad Y(0) = 0,$$

erfüllen. Folglich ist Y ein Vielfaches der Funktion

$$Y_n(y) = \sinh n\pi y.$$

Zusammenfassend schließen wir, dass

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = \sin n\pi x \sinh n\pi y$$

eine spezielle Lösung von $-\Delta u = 0$ in Ω mit der Randbedingung $u(x, 0) = u(0, y) = u(1, y) = 0$ ist.

Um auch die Randbedingung $u(x, 1) = f(x)$ zu erfüllen, bilden wir formal eine beliebige Linearkombination der Lösungen u_n :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x \sinh n\pi y$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann muss für $y = 1$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \sinh n\pi) \sin n\pi x, \quad x \in [0, 1],$$

gelten, also mit $b_n = c_n \sinh n\pi$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \quad \text{in } [0, 1].$$

Diese gesuchte Reihendarstellung von f auf $[0, 1]$ stimmt mit der Fourier-Reihenentwicklung der ungeraden Funktion \tilde{f} auf $[-1, 1]$ als reine Sinus-Reihe überein, wenn man f durch Spiegelung ungerade von $[0, 1]$ auf $[-1, 1]$ durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, 1] \\ -f(-x), & x \in [-1, 0] \end{cases}$$

fortsetzt. Die Unbekannten b_n sind die entsprechenden Fourier-Koeffizienten

$$b_n = \int_{-1}^1 \tilde{f}(x) \sin n\pi x \, dx = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx.$$

Damit erhalten wir als formale Lösung u der Laplace-Gleichung (6.1), (6.4) die unendliche Reihe

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sinh n\pi} \sin n\pi x \sinh n\pi y, \tag{6.6}$$

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx.$$

Da für $f \in C^0[0, 1]$ die Fourier-Koeffizienten (b_n) eine Nullfolge bilden und $\sinh n\pi \sim \frac{1}{2}e^{n\pi}$, $\sinh n\pi y \sim \frac{1}{2}e^{n\pi y}$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, ist die Reihe in (6.6) nicht nur für alle $(x, y) \in \Omega$ konvergent, sondern sogar zweimal nach x, y partiell differenzierbar. Insbesondere gilt $-\Delta u = 0$ in Ω . Außerdem werden die Randwerte

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0$$

angenommen. Schließlich gilt

$$u(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x,$$

so dass unter geeigneten Voraussetzungen an f , z. B. $f \in C^1[0, 1]$ und $f(0) = f(1) = 0$, auch $u(x, 1) = f(x)$ gültig ist. Es bleibt jedoch die Frage offen, ob u für $y = 1$ stetig ist, d. h., ob die Konvergenz

$$u(x, y) \rightarrow f(x) \quad \text{für } y \rightarrow 1- \tag{6.7}$$

gilt.

Beispiel 6.2 Wir betrachten nun die Laplace-Gleichung auf der Kreisscheibe $B_1 = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } B_1, \\ u &= g && \text{auf } \partial B_1, \end{aligned} \tag{6.8}$$

und versuchen mit Polarkoordinaten (r, φ) , $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, den Separationsansatz

$$u(x) = u(r, \varphi) = R(r)\phi(\varphi). \tag{6.9}$$

Wegen

$$\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 u$$

erhalten wir $R''\phi + \frac{1}{r}R'\phi + \frac{1}{r^2}R\phi'' = 0$ und somit

$$\frac{1}{R}(r^2 R'' + rR')(r) = -\frac{\phi''}{\phi}(\varphi).$$

Folglich gibt es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$-\phi'' = \lambda\phi \quad \text{in } [0, 2\pi]. \tag{6.10}$$

Da ϕ 2π -periodisch in φ ist, hat dieses Eigenwertproblem genau die folgenden Lösungen:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0 && \text{und } \phi_0(\varphi) = 1, \\ \lambda_n &= n^2, n \in \mathbb{N}, && \text{und } \phi_n(\varphi) = \cos n\varphi, \phi_n(\varphi) = \sin n\varphi; \end{aligned} \tag{6.11}$$

jedes $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, ist also doppelter Eigenwert. Dann muss $R(r)$ für $\lambda = \lambda_n = n^2$ die sog. *Eulersche Differentialgleichung*

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0, \quad r \in [0, 1], \quad (6.12)$$

erfüllen. Als Randbedingung wird nur gefordert, dass $R(r)$ für $r \rightarrow 0$ stetig ist. Im Fall $n = 0$ erhält man die Lösung

$$R(r) = a + b \log r,$$

wobei $b = 0$ gelten muss. Für $n \in \mathbb{N}$ hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \lambda - n^2$$

zu (6.12) die Nullstellen $\lambda = \pm n$, so dass die allgemeine Lösung von (6.12)

$$R(r) = ar^n + br^{-n}$$

lautet. Wegen der Stetigkeit von R in $r = 0$ muss $b = 0$ gelten. Somit liefert der Separationsansatz (6.9) die Lösungen

$$u_n(r, \varphi) = a_n r^n \cos n\varphi + b_n r^n \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Allgemein erhält man die formale Lösung

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n \cos n\varphi + b_n r^n \sin n\varphi) \quad (6.13)$$

von $-\Delta u = 0$ in B_1 ; man beachte, dass hier wie in der Theorie der Fourierreihen der konstante Term in der Form $\frac{a_0}{2}$ geschrieben wurde.

Zur Lösung des Randwertproblems (6.8) muss zusätzlich (formal)

$$g(\varphi) = u(1, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \quad (6.14)$$

gelten. Die Unbekannten a_n, b_n sind also die Fourier-Koeffizienten der 2π -periodischen Funktion $g(\varphi)$, und es gilt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi.$$

Da (a_n) und (b_n) Nullfolgen sind, konvergiert die Reihe (6.13) für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $r \in [0, 1)$ und stellt eine unendlich oft stetig partiell differenzierbare Funktion bzgl. r, φ und auch bzgl. x, y dar. Für $r = 1$ gilt (6.14) punktweise für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$, wenn g z.B. stetig differenzierbar ist. Dagegen ist die Konvergenz

$$u(r, \varphi) \rightarrow u(1, \varphi) \quad \text{für } r \rightarrow 1-,$$

also die punktweise Annahme der Randwerte, schwieriger zu analysieren.

Beispiel 6.3 Wir betrachten die eindimensionale Wellengleichung auf dem Intervall $(0, l)$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0, l) \\ u(0, \cdot) &= f && \text{für } t = 0 \\ u_t(0, \cdot) &= 0 && \text{für } t = 0 \\ u(t, 0) = u(t, l) &= 0 && \text{für } t = 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Dabei sollte f die Kompatibilitätsbedingung $f(0) = f(l) = 0$ erfüllen. Der Separationsansatz

$$u(t, x) = X(x)T(t), \quad (6.16)$$

vgl. Beispiel 6.1, liefert die Gleichungen

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X & \text{in } (0, l) \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} -T'' = \lambda c^2 T & \text{in } \mathbb{R} \\ T'(0) = 0 \end{cases}. \quad (6.17)$$

Das erste Randwertproblem in (6.17) besitzt eine nichttriviale Lösung X nur für

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad \text{mit } X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zu $\lambda = \lambda_n$ besitzt das zweite Randwertproblem in (6.17) die (bis auf skalare Vielfache) eindeutige Lösung

$$T_n(t) = \cos \frac{n\pi c}{l} t.$$

Zusammengefasst liefert der Separationsansatz (6.16) die allgemeine (formale) Lösung

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi c t}{l} \quad (6.18)$$

der Wellengleichung. Um $u(0, \cdot) = f$ zu erreichen, sollte zusätzlich

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

gelten. Die Unbekannten b_n sind also die Fourier-Koeffizienten der Entwicklung von f in eine Sinus-Reihe auf $(0, l)$, vgl. Beispiel 6.1, und es gilt

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Die Eigenschaft, dass (b_n) eine Nullfolge ist, reicht aber nicht aus, um die Konvergenz der Reihe (6.18) mit elementaren Mitteln zu zeigen. Darüber hinaus ist nicht ohne Weiteres klar, ob u nach t und x zweimal partiell differenzierbar ist.

Beispiel 6.4 Die Wärmeleitungsgleichung auf dem Intervall $(0, \pi)$

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= 0 && \text{in } (0, \infty) \times (0, \pi) \\ u(0, \cdot) &= f && \text{in } (0, \pi) \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) &= 0 && \text{in } (0, \infty) \end{aligned} \quad (6.19)$$

legt den Separationsansatz

$$u(t, x) = X(x)T(t),$$

vgl. (6.16), nahe. Dabei genüge f wieder der Kompatibilitätsbedingung $f(0) = f(\pi) = 0$. Statt (6.17) gelangen wir zu den Anfangs- bzw. Randwertproblemen

$$\begin{cases} X'' = -\lambda X & \text{in } (0, \pi) \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad T' = -\lambda k T. \quad (6.20)$$

Daraus erhalten wir

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n(x) = \sin nx \quad \text{und} \quad T_n(t) = e^{-n^2 kt}, \quad n \in \mathbb{N},$$

sowie die formale Lösung

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 kt} \sin nx. \quad (6.21)$$

Um den Anfangswert $u(0, \cdot) = f$ zu erfüllen, muss zusätzlich

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

gelten. Die Unbekannten (b_n) sind also wieder die Fourier-Koeffizienten von f als Sinus-Reihe auf $(0, \pi)$, d. h.,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (6.22)$$

Da (b_n) eine Nullfolge ist und $e^{-n^2 kt}$ für jedes $t > 0$ exponentiell schnell in $n \in \mathbb{N}$ abklingt, ist $u(t, x)$ in (6.21) beliebig oft nach t, x partiell differenzierbar und löst die Wärmeleitungsgleichung $u_t - ku_{xx} = 0$. Die Aussage

$$u(t, x) \rightarrow u(0, x) = f(x) \quad \text{für } t \rightarrow 0+ \quad (6.23)$$

verlangt jedoch einen aufwändigeren Beweis. Wegen $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ ist u unter der Annahme (6.23) also die eindeutige Lösung von (6.19).

Für jedes feste $t > 0$ setzen wir (6.22) in (6.21) ein und erhalten

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \sin ny \, dy \right) e^{-n^2 kt} \sin nx \\ &= \int_0^{\pi} f(y) K(x, y, t) \, dy \end{aligned}$$

mit dem Integralkern

$$K(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 kt} \sin ny \sin nx, \quad (6.24)$$

dem sog. Wärmeleitungskern; dabei ist die Vertauschung der Integration mit der Summenbildung wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$ gerechtfertigt. Der Kern K ist eine unendlich oft differenzierbare Funktion auf $[0, \pi] \times [0, \pi] \times (0, \infty)$ mit $K(x, y, t) = K(y, x, t)$ und $K(0, \cdot, \cdot) = K(\pi, \cdot, \cdot) = 0$. Ferner hat K die folgenden Eigenschaften

- (1) $K \geq 0$ auf $[0, \pi] \times [0, \pi] \times (0, \infty)$
- (2) $\int_0^{\pi} K(x, y, t) \, dy \leq 1$ für alle $x \in [0, \pi]$ und $t > 0$.

Zum Beweis von (1) nehmen wir die Existenz eines Punktes $(x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi)$ und $t > 0$ mit $K(x, y, t) < 0$ an. Da K stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$K(x, y', t) < 0 \quad \text{für alle } |y' - y| < \varepsilon. \quad (6.25)$$

Dazu wählen wir eine Funktion $f \in C^0[0, \pi]$ mit $f > 0$ im Intervall $(y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2})$ und $f = 0$ in $[0, \pi] \setminus (y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2})$. Dann gilt für die eindeutige Lösung u von (6.19) mit Anfangswert f

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^{\pi} f(y) K(x, y, t) \, dy \\ &= \int_{y-\varepsilon/2}^{y+\varepsilon/2} f(y) K(x, y, t) \, dy \\ &< 0. \end{aligned}$$

Nach dem schwachen Minimumprinzip (analog zum schwachen Maximumprinzip, s. Satz 5.21) gilt aber

$$\min_{[0, t] \times [0, \pi]} u = \min_{t=0 \text{ oder } x \in \{0, \pi\}} u = 0.$$

Damit ist die Annahme (6.25) falsch, und (1) ist bewiesen.

Zum Beweis von (2) betrachten wir eine Folge $(f_n) \subset C^0[0, \pi]$ von Anfangswerten mit der Eigenschaft $f_n(0) = f_n(\pi) = 0$, $0 \leq f_n \leq 1$ und $f_n(x) = 1$ auf $[\frac{1}{n}, \pi - \frac{1}{n}]$. Dann gilt für die entsprechenden Lösungen (u_n) von (6.19)

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \int_0^\pi f_n(y) K(x, y, t) dy \\ &\rightarrow \int_0^\pi K(x, y, t) dy \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Außerdem ist nach dem schwachen Maximumprinzip Satz 5.21

$$\max_{[0, \pi]} u_n(t, \cdot) \leq \max_{t=0 \text{ oder } x \in \{0, \pi\}} u_n = \max_{[0, \pi]} f_n = 1.$$

Damit ist auch die Aussage (2) bewiesen. Wir erwähnen noch, dass in (2) kein Gleichheitszeichen stehen kann, da $\int_0^\pi K(x, y, t) dy$ für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindet.

Beispiel 6.5 (Wärmeleitungsgleichung und Wellengleichung mit Neumann-Randbedingung)

Wir betrachten die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \ell) \\ u(0) &= f && \text{auf } (0, \ell) \\ u_t(0) &= 0 && \text{auf } (0, \ell) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \ell) &= 0 && \text{für } t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{6.26}$$

sowie

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{auf } (0, \infty) \times (0, \ell) \\ u(0) &= f && \text{auf } (0, \ell) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \ell) &= 0 && \text{für } t > 0. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Der Separationsansatz $u(t, x) = X(x)T(t)$ liefert für X das Randwertproblem

$$-X'' = \lambda X, \quad X'(0) = X'(\ell) = 0$$

mit den nichttrivialen Lösungen

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \quad \text{und} \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Man beachte, dass hier $n = 0$ und $\lambda_0 = 0$, $X_0(x) = 1$ zugelassen sind. Dann erhält man wie in den vorhergehenden Beispielen 6.3 und 6.4 die formale Lösung

$$u(x, t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

für (6.26) sowie

$$u(x, t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi/\ell)^2 t} \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

für (6.27). Die Koeffizienten (a_n) sind die Fourier-Koeffizienten von f aus der Cosinus-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell},$$

so dass also

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

gelten muss.

Beispiel 6.6 (Wärmeleitungsgleichung und Wellengleichung mit Robin-Randbedingung)

Wie im Beispiel 6.5 betrachten wir die Wellengleichung sowie die Wärmeleitungsgleichung im Intervall $(0, \ell)$ mit Anfangswert $u(0, \cdot) = f$ (sowie ggf. $u_t(0, \cdot) = 0$); als Randbedingung wählen wir jedoch die Bedingungen

$$\begin{aligned} u_x(t, 0) - a_0 u(t, 0) &= 0 \\ u_x(t, \ell) + a_\ell u(t, \ell) &= 0 \end{aligned} \tag{6.28}$$

mit positiven Konstanten a_0 und a_ℓ . Die Wahl der Vorzeichen ergibt sich z. B. im Fall der Wärmeleitungsgleichung, wo u die Temperatur und u_x den Temperaturgradienten bezeichnen: ist die Temperatur im Innern (in $(0, \ell)$) größer als außen, wird Energie nach außen abgestrahlt ($u_x(t, 0) > 0 > u_x(t, \ell)$), vgl. das Fourier'sche Gesetz.

Der Separationsansatz $u(t, x) = X(x)T(t)$ führt auf das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -X'' &= \lambda X && \text{in } (0, \ell) \\ X' - a_0 X &= 0 && \text{in } x = 0 \\ X' + a_\ell X &= 0 && \text{in } x = \ell \end{aligned} \tag{6.29}$$

mit den zu bestimmenden Eigenwerten $\lambda \in \mathbb{C}$. Im Folgenden schreiben wir der Einfachheit halber $\lambda = \beta^2$.

Die allgemeine Lösung

$$X(x) = c \cos \beta x + d \sin \beta x \tag{6.30}$$

der Differentialgleichung 2. Ordnung muss jetzt die Randbedingungen in (6.29) erfüllen. Folglich müssen die Unbekannten $c, d \in \mathbb{C}$ das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -a_0 & \beta \\ a_\ell \cos \beta \ell - \beta \sin \beta \ell & \beta \cos \beta \ell + a_\ell \sin \beta \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Um $(c, d) \neq (0, 0)$ erreichen zu können, muss die Determinante der obigen Matrix verschwinden. Diese Determinantenbedingung führt auf die transzendente Gleichung

$$(\beta^2 - a_0 a_\ell) \tan \beta \ell = (a_0 + a_\ell) \beta \quad (6.31)$$

falls $\cos \beta \ell \neq 0$ ist, bzw. auf die Gleichung

$$\cos \beta \ell = 0, \quad \beta^2 = a_0 a_\ell. \quad (6.32)$$

Die zweite Möglichkeit (mit $\beta = \pm \sqrt{a_0 a_\ell}$, $\beta = (k + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}$, $k \in \mathbb{Z}$) kann nur auftreten, falls $\sqrt{a_0 a_\ell} \frac{\ell}{\pi} = |k + \frac{1}{2}|$, $k \in \mathbb{Z}$, gilt; eine zugehörige Eigenfunktion ist

$$X(x) = \beta \cos \beta x + a_0 \sin \beta x, \quad \beta = \sqrt{a_0 a_\ell}.$$

Deshalb widmen wir uns jetzt der Analyse der Gleichung (6.31), die wir zu

$$\tan \beta \ell = \frac{(a_0 + a_\ell) \beta}{\beta^2 - a_0 a_\ell} \quad (6.33)$$

umschreiben können.

Zuerst suchen wir Nullstellen $\beta > 0$ von (6.33); mit $\beta > 0$ ist auch $-\beta$ eine Nullstelle, führt aber zum gleichen Eigenwert $\lambda = \beta^2$ mit der gleichen Eigenfunktion X nach (6.30). Gleichung (6.33) kann nur numerisch gelöst werden. Eine Diskussion der Graphen der Funktionen

$$\tan \beta \ell \quad \text{und} \quad \frac{(a_0 + a_\ell) \beta}{\beta^2 - a_0 a_\ell}, \quad \beta > 0,$$

liefert jedoch sofort das Ergebnis, dass (6.33) in jedem Intervall $(\frac{n\pi}{\ell}, \frac{(n+1)\pi}{\ell})$, $n \in \mathbb{N}_0$, genau eine Nullstelle β_n hat. Folglich gibt es eine Folge von Eigenwerten $\lambda_n = \beta_n^2$ mit

$$\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 < \lambda_n < \left(\frac{(n+1)\pi}{\ell}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Außerdem erkennt man, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda_n - \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \right) = 0$$

gilt. Wegen $-a_0 c + \beta_n d = 0$ ist $X_n(x) = \cos \beta_n x + \frac{a_0}{\beta_n} \sin \beta_n x$, oder, nach Normierung,

$$X_n(x) = \cos \sqrt{\lambda_n} (x - \alpha_n), \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \arctan \frac{a_0}{\sqrt{\lambda_n}} \quad (6.34)$$

eine zugehörige Eigenfunktion. Es fällt auf, dass mit $n \rightarrow \infty$ sich die Eigenwerte λ_n wie die Eigenwerte $\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ des Neumann-Problems verhalten und dass sich die Eigenfunktionen $\cos \sqrt{\lambda_n} (x - \alpha_n)$ wie die Eigenfunktionen $\cos \frac{n\pi}{\ell} x$ des Neumann-Problems verhalten, da die Phasenverschiebung α_n für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

Nach der Diskussion der Eigenwerte $\lambda = \beta^2 > 0$ von (6.29) ist noch zu zeigen, dass es keine weiteren Eigenwerte $\lambda \leq 0$ oder $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gibt.

Lemma 6.7 (1) *Das Eigenwertproblem (6.29) besitzt nur Eigenwerte $\lambda > 0$.*

(2) *Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten stehen im Sinne des L^2 -Skalarproduktes*

$$(u, v) = \int_0^\ell u \bar{v} dx$$

senkrecht aufeinander.

Beweis

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von (6.29) und $X(x)$ eine zugehörige (komplexwertige) Eigenfunktion. Wir testen (6.29) mit X und erhalten mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\ell |X|^2 dx &= \int_0^\ell \lambda X \cdot \bar{X} dx = - \int_0^\ell X'' \bar{X} dx \\ &= \int_0^\ell |X'|^2 dx - X' \bar{X} \Big|_0^\ell \\ &= \int_0^\ell |X'|^2 dx + a_\ell |X(\ell)|^2 + a_0 |X(0)|^2 > 0. \end{aligned}$$

Folglich muss $\lambda > 0$ sein.

(2) Seien X, Y Eigenfunktionen von (6.29) zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda, \mu > 0$. Dann folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\ell X \bar{Y} dx &= \int_0^\ell -X'' \bar{Y} dx = \int_0^\ell X' \bar{Y}' dx - X' \bar{Y} \Big|_0^\ell \\ &= \int_0^\ell X' \bar{Y}' dx + a_\ell (X \bar{Y})(\ell) + a_0 (X \bar{Y})(0) \\ &= \dots = \int_0^\ell X \overline{(-Y'')} dx \\ &= \mu \int_0^\ell X \bar{Y} dx. \end{aligned}$$

Wegen $\lambda \neq \mu$ folgt daraus die Behauptung $\int_0^\ell X \bar{Y} dx = 0$.

■

Mit Kenntnis aller Eigenwerte $(\lambda_n) \subset (0, \infty)$ und zugehöriger Eigenfunktionen $X_n(x)$, s. (6.34), können wir die Anfangsrandwertprobleme der Wellengleichung

und der Wärmeleitungsgleichung bei gegebenen Anfangswerten wie in den Beispielen 6.3– 6.5 formal durch einen Reihenansatz lösen. Für die Wellengleichung erhält man mit den Funktionen

$$T_n(t) = \cos \sqrt{\lambda_n} t, \quad n \in \mathbb{N},$$

als Lösung der Gleichung $-T'' = \lambda_n T$, $T'(0) = 0$, die formale Lösung

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n(x) T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\sqrt{\lambda_n}(x - \alpha_n)) \cos(\sqrt{\lambda_n} t) \end{aligned} \quad (6.35)$$

mit α_n aus (6.34). Dabei sind die Koeffizienten b_n aus der Anfangsbedingung

$$f(x) = u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n(x) \quad (6.36)$$

zu bestimmen. Analog benutzt man für die Wärmeleitungsgleichung die Funktionen

$$T_n(t) = e^{-\lambda_n t}, \quad n \in \mathbb{N},$$

als Lösung der Gleichung $T' = -\lambda_n T$ und erhält die formale Lösung

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n(x) e^{-\lambda_n t}. \quad (6.37)$$

Wie zuvor müssen die Koeffizienten b_n aus der Anfangsbedingung $f(x) = u(0, x)$, also aus (6.36) bestimmt werden.

Es bleibt das Problem, (b_n) aus (6.36) zu bestimmen. Unter der Voraussetzung, dass die Reihe in (6.36) gleichmäßig auf $[0, \ell]$ konvergiert, folgt aus der Orthogonalität der Eigenfunktionen $(X_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = (\cos \sqrt{\lambda_n}(x - \alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$, s. Lemma 6.7(2), für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$(f, X_k) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\ell} X_n(x) \cdot X_k(x) dx = b_k \int_0^{\ell} X_k^2(x) dx. \quad (6.38)$$

Die Größe

$$\int_0^{\ell} X_k^2(x) dx = \|\cos \sqrt{\lambda_k}(\cdot - \alpha_k)\|_{L^2(0, \ell)}^2,$$

das Quadrat der $L^2(0, \ell)$ -Norm der Funktion $\cos(\sqrt{\lambda_k}(x - \alpha_k))$ kann nicht explizit berechnet werden; es gilt jedoch für große $k \in \mathbb{N}$

$$\|X_k\|_{L^2(0, \ell)}^2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_{-\sqrt{\lambda_k} \alpha_k}^{\sqrt{\lambda_k}(\ell - \alpha_k)} \cos^2 y dy \leq \frac{\ell}{k\pi} \int_{-\pi}^{(k+1)\pi} \cos^2 y dy \leq \ell$$

sowie

$$\|X_k\|_{L^2(0,\ell)}^2 \geq \frac{\ell}{(k+1)\pi} \int_0^{(k-1)\pi} \cos^2 y \, dy \geq \frac{\ell}{4}.$$

Mit der Notation $\|u\|_2 = \|u\|_{L^2(0,\ell)} = (u, u)^{1/2}$ folgt aus (6.38)

$$b_n = \frac{(f, X_n)}{\|X_n\|_2^2}. \quad (6.39)$$

Wir interpretieren (b_n) als die *verallgemeinerten Fourier-Koeffizienten von f bzgl. des Orthogonalsystems $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$* , und (6.36), d.h. die formale Reihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, X_n) X_n}{\|X_n\|_2^2}, \quad (6.40)$$

als *verallgemeinerte Fourier-Reihenentwicklung bzgl. (X_n)* . Die Konvergenzanalyse von (6.40) und der Lösungen (6.35) bzw. (6.37) ist jedoch wesentlich schwieriger als bei der klassischen Theorie der Fourier-Reihen.

Beispiel 6.8 Wir betrachten die zweidimensionale Wellengleichung für die Kreisscheibe

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq a\},$$

also das Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \partial\Omega \\ u(0) &= 0 && \text{für } t = 0 \\ u_t(0) &= f && \text{für } t = 0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Benutzt man Polarkoordinaten (r, φ) , $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, für (x, y) sowie den Ansatz

$$u(t, r, \varphi) = T(t) R(r) \phi(\varphi),$$

erhält man aus (6.41) die Gleichung

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\phi''}{r^2 \phi}.$$

Folglich existiert eine Konstante λ mit $T'' = -c^2 \lambda T$, ferner eine Konstante γ mit $\phi''/\phi = -\gamma$, so dass insgesamt die drei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T'' + c^2 \lambda T = 0 \quad (6.42)$$

$$\phi'' + \gamma \phi = 0 \quad (6.43)$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\lambda - \frac{\gamma}{r^2}\right) R = 0 \quad (6.44)$$

entstehen. Da $\phi(\varphi)$ 2π -periodisch ist, hat (6.43) wie in Beispiel 6.2 genau die Eigenwerte und -funktionen

$$\gamma_n = n^2, \quad \phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (6.45)$$

Damit wird (6.44) zum Randwertproblem

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0, \quad R(a) = 0, \quad R(0) \text{ endlich}; \quad (6.46)$$

die Bedingung $R(a) = 0$ ergibt sich aus der Randbedingung $u(t, \cdot) = 0$ auf $\partial\Omega$, und die Bedingung „ $R(0)$ endlich“ soll implizieren, dass u im Ursprung $(x, y) = (0, 0)$ definiert ist.

Die gewöhnliche Differentialgleichung (6.46) kann nicht explizit gelöst werden, hat jedoch für $r \rightarrow 0$ Ähnlichkeit mit der Eulerschen Differentialgleichung

$$rh'' + rh' - n^2h = 0,$$

welche die linear unabhängigen Lösungen r^n und r^{-n} besitzt. Zur Vereinfachung von (6.46) führen wir die neue Variable $\rho = \sqrt{\lambda}r$ ein und betrachten statt $R(r)$ jetzt die Funktion $S(\rho) = R(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}})$. Wegen $R_r = \sqrt{\lambda}S_\rho$ und $R_{rr} = \lambda S_{\rho\rho}$ erhält (6.46) dann die Standardform

$$S_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} S_\rho + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) S = 0, \quad S = 0 \text{ für } \rho = a\sqrt{\lambda}, \quad S(0) \text{ endlich}. \quad (6.47)$$

Die Differentialgleichung in (6.47) heißt *Besselsche Differentialgleichung* und kann durch den Potenzreihenansatz

$$J_n(\rho) = \rho^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad a_0 \neq 0,$$

gelöst werden. Mit der Normierung $a_0 = \frac{2^{-n}}{n!}$ liefert ein Koeffizientenvergleich die Lösung

$$J_n(\rho) = \rho^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j 2^{-n-2j}}{j!(n+j)!} \rho^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+2j},$$

die *Besselfunktion der Ordnung n* . Die Funktionen J_n , $n \in \mathbb{N}_0$, haben die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} J_n(\rho) &\sim \frac{\rho^n}{n!2^n} \quad \text{für } \rho \rightarrow 0 \\ J_n(\rho) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad \text{für } \rho \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6.48)$$

J_n hat unendlich viele einfache Nullstellen

$$0 < \lambda_{n1} < \lambda_{n2} < \lambda_{n3} < \dots \quad (6.49)$$

(die erste Eigenschaft ist trivial, die beiden anderen Eigenschaften können hier nicht bewiesen werden). Die Bedingung „ $S(0)$ endlich“ in (6.47) ist für $S(\rho) = J_n(\rho)$ erfüllt. Dagegen kann die Randbedingung $R(a) = S(a\sqrt{\lambda}) = J_n(a\sqrt{\lambda}) = 0$ nur erfüllt werden, wenn $a\sqrt{\lambda}$ mit einer Nullstelle λ_{nm} , $m \in \mathbb{N}$ von J_n übereinstimmt. Damit erhalten wir die Lösungen $R_{nm}(r) = J_n\left(\frac{\lambda_{nm}}{a} r\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, von (6.44). Schließlich muss in (6.42) $\lambda = (\lambda_{nm}/a)^2$ gesetzt werden, und die allgemeine Lösung lautet $T_{nm}(t) = C_{nm} \cos\left(\frac{c\lambda_{nm}}{a} t\right) + D_{nm} \sin\left(\frac{c\lambda_{nm}}{a} t\right)$. Fasst man alle Anteile $R(r)$, $T(t)$ und $\phi(\varphi)$ zusammen, erhält man die formale Lösung

$$\begin{aligned} u(t, r, \varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\lambda_{0m} r}{a}\right) \left(C_{0m} \cos\left(\frac{c\lambda_{0m}}{a} t\right) + D_{0m} \sin\left(\frac{c\lambda_{0m}}{a} t\right) \right) \\ &+ \sum_{m,n=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\lambda_{nm} r}{a}\right) (A_{nm} \cos n\varphi + B_{nm} \sin n\varphi) \\ &\quad \times \left(C_{nm} \cos\left(\frac{c\lambda_{nm}}{a} t\right) + D_{nm} \sin\left(\frac{c\lambda_{nm}}{a} t\right) \right). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Um die Koeffizienten A_{nm}, \dots, D_{nm} aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen, nehmen wir an, dass die obige Reihe gleichmäßig in $r \in [0, a]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ konvergiert, und benötigen, dass die beteiligten Eigenfunktionen orthogonal zueinander sind. Zur Vereinfachung sei im Folgenden

$$J_{nm}(r) = J_n\left(\frac{\lambda_{nm} r}{a}\right).$$

Lemma 6.9 (1) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \neq k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^a J_{nm}(r) J_{nk}(r) r dr = 0. \quad (6.51)$$

(2) Für festes $m \in \mathbb{N}$ und beliebige $n \neq \ell \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_{\Omega} J_{nm}(r) \cos n\varphi \cdot J_{\ell m}(r) \cos \ell\varphi d(x, y) = 0. \quad (6.52)$$

Die analoge Aussage gilt, wenn $\cos n\varphi$ und/oder $\cos \ell\varphi$ durch $\sin n\varphi$ und/oder $\sin \ell\varphi$ ersetzt wird.

Beweis Da (2) eine einfache Konsequenz der Orthogonalität der Funktionen $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ zu $\cos \ell\varphi$ und $\sin \ell\varphi$ auf $[0, 2\pi]$ ist, bleibt (1) zu beweisen. Wegen

$$\left[\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \left(\left(\frac{\lambda_{nm}}{a} \right)^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right] J_{nm} = 0,$$

gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^a \left[\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \left(\left(\frac{\lambda_{nm}}{a} \right)^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right] J_{nm} \cdot J_{nk} r dr \\
&= \int_0^a \left(-J'_{nm} J'_{nk} r - J'_{nm} J_{nk} + J'_{nm} J_{nk} \right) dr + J'_{nm} J_{nk} r \Big|_0^a \\
&\quad + \left(\frac{\lambda_{nm}}{a} \right)^2 \int_0^a J_{nm} J_{nk} r dr - \int_0^a \frac{n^2}{r^2} J_{nm} J_{nk} r dr \\
&= - \int_0^a \left(J'_{nm} J'_{nk} + \frac{n^2}{r^2} J_{nm} J_{nk} \right) r dr + \left(\frac{\lambda_{nm}}{a} \right)^2 \int_0^a J_{nm} J_{nk} r dr;
\end{aligned}$$

hierbei wurde partielle Integration sowie $J_{nk}(a) = 0$ benutzt. Ebenso gilt

$$0 = - \int_0^a \left(J'_{nk} J'_{nm} + \frac{n^2}{r^2} J_{nk} J_{nm} \right) r dr + \left(\frac{\lambda_{nk}}{a} \right)^2 \int_0^a J_{nm} J_{nk} r dr.$$

Subtrahiert man beide Gleichungen voneinander und berücksichtigt $0 < \lambda_{nm} \neq \lambda_{nk}$ für $m \neq k$, erhält man die gewünschte Orthogonalität von J_{nm} und J_{nk} bzgl. des Skalarprodukts

$$(u, v)_\Omega := \int_\Omega uv d(x, y).$$

Dieses Skalarprodukt stimmt für radialsymmetrische Funktionen u, v auf Ω mit $2\pi \int_0^a u(r)v(r) r dr$ überein. ■

Für $t = 0$ liefern (6.50) und (6.41) die Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= u(0, r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} J_{0m}(r) C_{0m} \\
&\quad + \sum_{m,n=1}^{\infty} J_{nm}(r) (A_{nm} \cos n\varphi + B_{nm} \sin n\varphi) C_{nm}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f = u_t(0, r, \varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} J_{0m}(r) D_{0m} \frac{c\lambda_{0m}}{a} \\
&\quad + \sum_{m,n=1}^{\infty} J_{nm}(r) (A_{nm} \cos n\varphi + B_{nm} \sin n\varphi) D_{nm} \frac{c\lambda_{nm}}{a}.
\end{aligned}$$

Dann folgt aus den Orthogonalitätsbedingungen von Lemma 6.9 sofort $C_{0m} = C_{nm}A_{nm} = C_{nm}B_{nm} = 0$,

$$\begin{aligned}
(f, J_{NM}(r) \cos N\varphi)_\Omega &= \int_0^a J_{NM}^2(r) r dr \cdot \pi A_{NM} D_{NM} \frac{c\lambda_{NM}}{a}, \\
(f, J_{NM}(r) \sin N\varphi)_\Omega &= \int_0^a J_{NM}^2(r) r dr \cdot \pi B_{NM} D_{NM} \frac{c\lambda_{NM}}{a},
\end{aligned}$$

für $N, M \in \mathbb{N}$ sowie eine entsprechende Identität für D_{0m} . Mit der Wahl $C_{0m} = C_{nm} = 0$, $D_{nm} = 1$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ reduziert sich (6.50) auf die formale Reihenentwicklung

$$u(t, r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} J_{0m}(r) D_{0m} \sin\left(\frac{c\lambda_{0m}}{a} t\right) + \sum_{m,n=1}^{\infty} J_{nm}(r) (A_{nm} \cos n\varphi + B_{nm} \sin n\varphi) \sin\left(\frac{c\lambda_{nm}}{a} t\right)$$

mit den verallgemeinerten Fourier-Koeffizienten

$$D_{0m} = (f, J_{0m}(r))_{\Omega} \frac{a}{c\lambda_{0m}\pi} \left(\int_0^a J_{0m}^2 r dr \right)^{-1}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$A_{nm} = (f, J_{nm}(r) \cos n\varphi)_{\Omega} \frac{a}{c\lambda_{nm}\pi} \left(\int_0^a J_{nm}^2 r dr \right)^{-1}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

$$B_{nm} = (f, J_{nm}(r) \sin n\varphi)_{\Omega} \frac{a}{c\lambda_{nm}\pi} \left(\int_0^a J_{nm}^2 r dr \right)^{-1}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

A1 L^p -Räume und Faltungsintegrale

Zur Behandlung von linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten im Ganzraum \mathbb{R}^n wird häufig die Theorie der Fourier-Transformation, s. A2, und die Darstellung der Lösung durch Faltungsintegrale benutzt. Für eine moderne Darstellung und die Analysis von Integralen über dem \mathbb{R}^n ist es sinnvoll, das Lebesgue-Integral dem Riemann-Integral vorzuziehen. Der Abschnitt A1 liefert jedoch keine mathematisch präzise Abhandlung des Lebesgue-Integrals und des dafür benötigten Lebesgue-Maßes, sondern stellt nach einer kurzen Einführung die wichtigsten Eigenschaften des Lebesgue-Integrals zusammen. Anschließend werden Faltungsintegrale und in A2 die Fourier-Transformation definiert und z.T. streng analysiert.

Das *Lebesgue-Maß* μ auf dem \mathbb{R}^n ist eine abzählbar-unendlich additive, nicht-negative *Volumenfunktion*, die auf einem großen System von Teilmengen des \mathbb{R}^n , auf der sog. *Lebesgue'schen σ -Algebra* \mathcal{L} , definiert ist. Präziser formuliert gilt

$$(i) \quad \emptyset \in \mathcal{L} \text{ und } \mu(\emptyset) = 0, \mathbb{R}^n \in \mathcal{L} \text{ und } \mu(\mathbb{R}^n) = +\infty.$$

$$(ii) \quad A \in \mathcal{L} \Rightarrow A^c \in \mathcal{L}.$$

$$(iii) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}.$$

Es gilt sogar: Aus $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ folgt $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

$$(iv) \quad A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \in \mathcal{L} \text{ und } \mu(A) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

Die Teilmengen $A \in \mathcal{L}$ heißen auch *Lebesgue-messbar*. Insbesondere sind alle offenen, alle abgeschlossenen und auch alle Jordan-messbaren Teilmengen des \mathbb{R}^n , die bei der Definition des n -dimensionalen Riemann-Integrals benötigt werden, Lebesgue-messbar. Für Jordan-messbare Mengen stimmen Jordan-Inhalt und Lebesgue-Maß überein.

Bemerkung A1.1 Eine Sonderrolle spielen die *Lebesgue-Nullmengen*, also die Mengen $N \in \mathcal{L}$ mit $\mu(N) = 0$. Nullmengen haben die folgenden Eigenschaften:

$$(i) \quad N_1, N_2, \dots \in \mathcal{L} \text{ Lebesgue-Nullmengen} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\right) = 0$$

$$(ii) \quad N \in \mathcal{L} \text{ Lebesgue-Nullmenge} \Rightarrow \\ \text{jede Menge } M \subset N \text{ ist Lebesgue-Nullmenge.}$$

$$(iii) \quad M \in \mathcal{L} \text{ und } N \in \mathcal{L} \text{ Lebesgue-Nullmenge} \Rightarrow \\ M \cup N, M \setminus N \in \mathcal{L}, \mu(M \cup N) = \mu(M \setminus N) = \mu(M) = 0.$$

Insbesondere ist jede endliche und jede abzählbar unendliche Menge wie z.B. \mathbb{Q}^n eine Nullmenge; es gibt jedoch auch überabzählbare Lebesgue-Nullmengen.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (*Lebesgue*)-*messbar*, falls

$$f^{-1}((-\infty, \alpha)) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \alpha\}$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist, d.h. $f^{-1}((-\infty, \alpha)) \in \mathcal{L}$. Durch ein Approximationsargument mit Hilfe von Treppenfunktionen, die auf Lebesgue-messbaren Teilmengen des \mathbb{R}^n konstant sind, kann jetzt jeder nicht-negativen Lebesgue-messbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ das Lebesgue-Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \in [0, \infty]$$

zugeordnet werden. Für eine beliebige Lebesgue-messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ benutzt man die Zerlegung $f = f_+ - f_-$ mit

$$f_+ = \max(f, 0) = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f_- = \max(-f, 0) = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Gilt dann $\int_{\mathbb{R}^n} f_+(x) dx < \infty$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f_-(x) dx < \infty$, definiert die reelle Zahl

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f_-(x) dx$$

das *Lebesgue-Integral von f* auf \mathbb{R}^n . Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte oder unbeschränkte Lebesgue-messbare Menge und ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, werden die obigen Definitionen auf f ausgedehnt, indem man die Fortsetzung

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

betrachtet. Insbesondere wird dann das Lebesgue-Integral $\int_{\Omega} f(x) dx$ durch $\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) dx$ definiert.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, Jordan-messbare Menge und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist f auch Lebesgue-integrierbar und das Riemann-Integral von f über Ω und das Lebesgue-Integral von f über Ω stimmen überein. Das Lebesgue-Integral stellt jedoch eine echte, weit reichende Erweiterung des Riemann-Integrals dar. Ein elementares Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

die bekanntlich auf keinem beschränkten Intervall $[a, b]$, $a < b$, Riemann-integrierbar ist. Dagegen ist f Lebesgue-integrierbar, und mit Bemerkung A1.1 kann man

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \quad \text{für alle } -\infty \leq a < b \leq +\infty$$

zeigen. Ferner darf eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf jeder Lebesgue-Nullmenge beliebig abgeändert werden, ohne dass sich der Wert des Integrals ändert. Genauer gilt:

Bemerkung A1.2 Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar, und ist $N \in \mathcal{L}$ eine Lebesgue-Nullmenge, so ist jede Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$g(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus N,$$

kurz: $g = f$ fast überall oder $g = f$ f.ü., ebenfalls Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx.$$

Bemerkung A1.3 Wie das Riemann-Integral besitzt das Lebesgue-Integral die folgenden elementaren Eigenschaften (für Lebesgue-integrierbare Funktionen $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Lebesgue-messbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$):

$$(i) \quad \int_{\Omega} (af(x) + bg(x)) dx = a \int_{\Omega} f(x) dx + b \int_{\Omega} g(x) dx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad f \geq 0 \text{ f.ü.} \Rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx \geq 0.$$

$$(iii) \quad \left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Ferner gilt für das Lebesgue-Integral messbarer Funktionen:

$$(iv) \quad \int_{\Omega} |f(x)| dx = 0 \iff f = 0 \text{ f.ü.}$$

$$(v) \quad f \text{ Lebesgue-integrierbar} \iff |f| \text{ Lebesgue-integrierbar}$$

Definition A1.4 Für $1 \leq p < \infty$ wird der Lebesgue-Raum $L^p(\mathbb{R}^n)$ durch

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar,} \right. \\ \left. \|u\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

definiert. Analog wird für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und für komplex-wertige Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ der Raum $L^p(\Omega)$ mit L^p -Norm $\|u\|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$ definiert.

Eine Funktion $u \in L^1(\Omega)$ heißt *absolut-integrierbar*, eine Funktion $u \in L^2(\Omega)$ auch *quadrat-integrierbar*.

Damit die fundamentale Norm-Eigenschaft $\|u\|_p = 0 \Rightarrow u = 0$ erfüllt ist, muss nach Bemerkung A1.3 die Definition A1.4 leicht abgeändert werden. Statt der Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet man im Raum $L^p(\Omega)$ die Äquivalenzklasse

$$[u] = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar, } v = u \text{ f.ü.}\}$$

von Funktionen v , die mit u f.ü. übereinstimmen und folglich $\|v\|_p = \|u\|_p$ sowie $\|u - v\|_p = 0$ erfüllen. Präziser formuliert ist

$$L^p(\Omega) = \left\{ [u] : \text{es gibt einen Lebesgue-messbaren Repräsentanten} \right. \\ \left. v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ in } [u] \text{ mit } \|[u]\|_p := \|v\|_p = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Streng genommen ist $L^p(\Omega)$ also kein Raum von Funktionen, sondern eine Menge von Äquivalenzklassen; je zwei Repräsentanten in einer Äquivalenzklasse stimmen f.ü. überein. Mit dieser Definition gilt:

$$\|[u]\|_p = 0 \Rightarrow \|v\|_p = 0 \quad \forall v \in [u] \Rightarrow v = 0 \text{ f.ü. } \forall v \in [u].$$

Obwohl wir im Folgenden die Unterschiede zwischen einer Funktion u und ihrer Äquivalenzklasse $[u]$ nicht streng beachten wollen, ist zu betonen, dass *nicht von einzelnen Funktionsauswertungen* $u(x)$ einer „Funktion“ $u \in L^p(\Omega)$ gesprochen werden darf: u ist nur f.ü. eindeutig definiert

Definition A1.5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, und sei $p = \infty$. Dann definiert man den Raum $L^\infty(\Omega)$ der *wesentlich beschränkten Funktionen* auf Ω durch

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}) : u \text{ ist Lebesgue-messbar,} \right. \\ \left. \|u\|_\infty = \text{ess sup}_\Omega |u| < \infty \right\}.$$

Dabei ist das *essentielle Supremum*

$$\|u\|_\infty = \inf \{ K \geq 0 : |u(x)| \leq K \text{ f.ü. in } \Omega \}.$$

Wie auch im Fall $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, wird $L^\infty(\Omega)$ streng genommen nicht als Funktionenraum definiert, sondern als Menge von Äquivalenzklassen $[u]$, so dass zwei Elemente $v_1, v_2 \in [u]$ f.ü. übereinstimmen. Dann gilt

$$\|[u]\|_\infty = 0 \Rightarrow \|v\|_\infty = 0 \quad \forall v \in [u] \Rightarrow v = 0 \text{ f.ü. } \forall v \in [u].$$

Satz A1.6 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $L^p(\Omega)$ ein *vollständiger, normierter Raum*, d.h., es gelten die folgenden Eigenschaften:

- (i) $\|u\|_p \geq 0$ und $\|u\|_p = 0 \iff u = 0$,
- (ii) $\|\lambda u\|_p = |\lambda| \|u\|_p$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$),
- (iii) $\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$

sowie

- (iv) Ist $(u_k) \subset L^p(\Omega)$ eine *Cauchy-Folge*, gibt es ein Element $u \in L^p(\Omega)$ mit $u_k \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$ für $k \rightarrow \infty$, d.h.

$$\|u - u_k\|_p \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Zusätzlich gibt es eine Teilfolge (!) (u_{k_j}) von (u_k) , so dass

$$u_{k_j} \rightarrow u \text{ punktweise f.ü. für } j \rightarrow \infty.$$

(v) Für $1 \leq p < \infty$ liegt die Menge der Funktionen

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } f \text{ kompakt in } \Omega\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$, d.h., zu jedem $f \in L^p(\Omega)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\|f - f_\varepsilon\|_{p,\Omega} < \varepsilon.$$

Diese Aussage ist für $p = \infty$ nicht gültig!

(vi) Für $1 \leq p < \infty$ gilt in $L^p(\mathbb{R}^n)$ die folgende Stetigkeit im L^p -Mittel:

$$\|f - f(\cdot - h)\|_p \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0,$$

wobei $f(\cdot - h)$ die Funktion $x \mapsto f(x - h)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Diese Aussage ist für $p = \infty$ nicht gültig!

Beweis Die Norm-Eigenschaften (i) – (iii) sind in den Fällen $p = 1$ und $p = \infty$ trivial. Die Dreiecksungleichung (iii) beruht für $1 < p < \infty$ auf der Hölder-Ungleichung, s. Satz A1.7. Zum Beweis der Aussagen (iv) (Satz von Riesz-Fischer) und (v), (vi) wird auf die Lehrbuch-Literatur zur Maßtheorie und zur Funktionalanalysis verwiesen.

Satz A1.7 (Hölder-Ungleichung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $1 \leq p \leq \infty$ und $p' = \frac{p}{p-1}$, also

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1;$$

für $p = 1$ sei $p' = \infty$, für $p = \infty$ sei $p' = 1$. Dann gilt für $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^{p'}(\Omega)$

$$u \cdot v \in L^1(\Omega) \quad \text{und} \quad \|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}.$$

Für $p = p' = 2$ erhält man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Beweis Der Beweis ist in den Fällen $p = 1$ und $p = \infty$ trivial; für beliebiges $p \in (1, \infty)$ benutzt man dagegen die Youngsche Ungleichung

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \quad \text{für } a, b \geq 0. \quad \blacksquare$$

Ein entscheidender Vorteil des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann-Integral ist ein Konvergenzsatz, der die Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung bei Funktionenfolgen unter relativ schwachen Voraussetzungen erlaubt. In der Theorie des Riemann-Integrals wird an dieser Stelle üblicherweise gleichmäßige Konvergenz gefordert.

Satz A1.8 (Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz) Sei $(u_k) \subset L^1(\Omega)$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die f.ü. gegen eine Funktion u konvergiere. Ferner existiere eine „Majorante“ $g \in L^1(\Omega)$ mit

$$|u_k(x)| \leq g(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist auch $u \in L^1(\Omega)$, und es gilt für $k \rightarrow \infty$

$$\int_{\Omega} u_k dx \rightarrow \int_{\Omega} u dx,$$

$$\int_{\Omega} |u_k - u| dx = \|u_k - u\|_1 \rightarrow 0.$$

In Satz A1.8 ist die Grenzfunktion $u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$ nur f.ü. in Ω definiert, also für $x \in \Omega \setminus N$, $\mu(N) = 0$. Da aber Elemente in $L^1(\Omega)$ nur f.ü. eindeutig definiert sein müssen, ist die Aussage $u \in L^1(\Omega)$ sinnvoll. Entscheidende Voraussetzung in Satz A1.8, der hier nicht bewiesen werden soll, ist die Existenz einer von $k \in \mathbb{N}$ unabhängigen Majorante $g \in L^1(\Omega)$.

Satz A1.9 Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert punktweise für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ das Faltungsintegral

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy.$$

Ferner gilt $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Beweis Ohne Beweis benutzen wir, dass $f * g$ Lebesgue-messbar ist, sowie eine Version des Satzes von Fubini für Lebesgue-Integrale. Zur Herleitung der Abschätzung von $\|f * g\|_p$ verwenden wir im Fall $p \in (1, \infty)$ die Hölder-Ungleichung (Satz A1.7) und erhalten

$$\begin{aligned} \left| \int f(x-y) g(y) dy \right| &\leq \int \underbrace{|f(x-y)|^{1-1/p}}_{p' = \frac{p}{p-1}} \underbrace{|f(x-y)|^{1/p} |g(y)|}_{p} dy \\ &\leq \left(\int |f(x-y)| dy \right)^{1/p'} \left(\int |f(x-y)| |g(y)|^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Dabei gilt $\int |f(x-y)|dy = \int |f(z)|dz = \|f\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Jetzt folgt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p^p &= \int \left| \int f(x-y) g(y) dy \right|^p dx \\ &\leq \int \left(\|f\|_1^{p/p'} \int |f(x-y)| |g(y)|^p dy \right) dx \\ &= \|f\|_1^{p/p'} \int |g(y)|^p \left(\int |f(x-y)| dx \right) dy \\ &= \|f\|_1^p \|g\|_p^p, \end{aligned}$$

da $\frac{p}{p'} + 1 = p$. Aus der Aussage $\|f * g\|_p < \infty$ kann man schließen, dass punktweise f.ü. $(f * g)(x)$ wohldefiniert ist. In den Fällen $p = 1$ und $p = \infty$ ist die Abschätzung $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ trivial. ■

Bemerkung A1.10 Das in Satz A1.9 definierte Faltungsprodukt $*$ hat die folgenden Eigenschaften:

- (i) $f * g = g * f$ (Kommutativität) für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, d.h., für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y) dy = g * f(x).$$

- (ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (Assoziativität), falls zwei der Funktionen f, g, h in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und eine in $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, liegen.
- (iii) $f * (g + h) = f * g + f * h$, $(\alpha f) * g = f * (\alpha g) = \alpha(f * g)$ (Distributivität), falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g, h \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, (oder umgekehrt) und $\alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. \mathbb{C}).

Die Beweise beruhen auf dem Satz von Fubini und der Substitutionsregel auf $L^1(\mathbb{R}^n)$.

A2 Die Fourier-Transformation

A2.1 Die Fourier-Transformation in $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definition A2.1 Für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wird die *Fourier-Transformierte* $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ punktweise durch

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

definiert; dabei bezeichnet $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ das Skalarprodukt für Vektoren $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Analog ist die *Fourier-Rücktransformation* \mathcal{F}^{-1} für eine Funktion

$h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\check{h}(x) = \mathcal{F}^{-1}(h)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) e^{+i\xi \cdot x} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) e^{+i\xi \cdot x} \check{d}\xi$$

mit

$$\check{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} d\xi$$

definiert. Man beachte, dass in beiden Fällen der Integrand wegen $|e^{\pm i x \cdot \xi}| = 1$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt und das L^1 -Integral für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ bzw. für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ definiert ist.

Satz A2.2 Die Fourier-Transformation \mathcal{F} hat die folgenden Eigenschaften:

(1) Für jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f}(\xi)$ stetig, und es gilt

$$\hat{f}(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{für } |\xi| \rightarrow \infty.$$

(2) Gilt neben $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sogar $|x| f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist \hat{f} stetig partiell differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = -i \widehat{x_j f}(\xi), \quad 1 \leq j \leq n.$$

(3) Gilt $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^n)^n$, so ist

$$\widehat{\partial_j f}(\xi) = i \xi_j \hat{f}(\xi), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Analoge Aussagen gelten für die Fourier-Rücktransformation.

Beweis

(1) Zum Beweis der Stetigkeit in $\xi \in \mathbb{R}^n$ betrachte man eine Folge $(\xi_k) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\xi_k \rightarrow \xi$ für $k \rightarrow \infty$. Dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) e^{-i\xi_k \cdot x} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x) e^{-i\xi \cdot x} \quad \text{und} \quad |f(x) e^{-i\xi_k \cdot x}| \leq |f(x)|,$$

$|f|$ ist also eine L^1 -Majorante für die Folge $(f(x) e^{-i\xi_k \cdot x})_{k \in \mathbb{N}}$. Dann liefert der Satz von Lebesgue (Satz A1.8) die Konvergenz $\hat{f}(\xi_k) \rightarrow \hat{f}(\xi)$, $k \rightarrow \infty$, also die Stetigkeit von \hat{f} in ξ .

Wegen $e^{-\pi i} = -1$ gilt

$$\hat{f}(\xi) = - \int f(x) e^{-i\xi \cdot (x + \pi\xi/|\xi|^2)} dx = - \int f(x - \pi\xi/|\xi|^2) e^{-i\xi \cdot x} dx.$$

Daraus folgt mit Satz A1.6 (vi)

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &= \left| \frac{1}{2} \int (f(x) - f(x - \pi\xi/|\xi|^2)) e^{-i\xi \cdot x} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|f - f(\cdot - \pi\xi/|\xi|^2)\|_1 \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $|\xi| \rightarrow \infty$.

(2) Mit dem j -ten Einheitsvektor $e_j \in \mathbb{R}^n$ gilt für $0 \neq h \rightarrow 0$

$$\frac{1}{h} (e^{-i(\xi+he_j) \cdot x} - e^{-i\xi \cdot x}) \rightarrow -ix_j e^{-i\xi \cdot x}$$

sowie

$$\left| \frac{1}{h} (e^{-i(\xi+he_j) \cdot x} - e^{-i\xi \cdot x}) \right| = \left| \frac{1}{h} (e^{-ihx_j} - 1) \right| \leq |x_j|,$$

da man $e^{-ihx_j} - 1$ als $\int_0^h \frac{d}{dt} (e^{-itx_j}) dt = ix_j \int_0^h e^{-itx_j} dt$ schreiben kann. Also ist $|x| f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine zulässige Majorante im Differenzenquotienten

$$\int \frac{1}{h} (e^{-i(\xi+he_j) \cdot x} - e^{-i\xi \cdot x}) f(x) dx,$$

und der Satz von Lebesgue beweist die Konvergenz dieses Ausdrucks gegen $-ix_j \hat{f}(\xi)$. Da nach (i) $\widehat{x_j f}$ in ξ stetig ist, ist \hat{f} sogar stetig partiell differenzierbar.

(3) Da $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$, gibt es wegen

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_R} |f(y)| do_y \right) dR < \infty$$

eine Folge $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Radien mit $R_k \rightarrow \infty$ und

$$\int_{\partial B_{R_k}} |f(y)| do_y \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Ferner gilt mit dem Satz von Lebesgue und partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_{R_k}} \partial_j f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_{R_k}} f(x) i\xi_j e^{-ix \cdot \xi} dx \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial B_{R_k}} f(y) e^{-iy \cdot \xi} \frac{y_j}{R_k} do_y \\ &= i\xi_j \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$. ■

Beispiel A2.3 Im \mathbb{R}^1 besitzt $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ die Fourier-Transformierte $\hat{h}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$.

Beweis Nach Satz A2.2(2) ist $\hat{h}(\xi)$ stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \hat{h}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -ix e^{-ix\xi} e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \frac{d}{dx} (e^{-x^2/2}) dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \xi e^{-ix\xi} e^{-x^2/2} dx, \end{aligned}$$

wobei die partielle Integration im letzten Schritt durch ein Limes-Argument gerechtfertigt werden muss. Es gilt also

$$\frac{d}{d\xi} \hat{h}(\xi) = -\xi \hat{h}(\xi)$$

sowie

$$\hat{h}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = 1.$$

Folglich stimmt $\hat{h}(\xi)$ mit der eindeutig bestimmten Lösung $e^{-\xi^2/2}$ der gewöhnlichen Differentialgleichung $u' = -\xi u$, $u(0) = 1$ überein. ■

Das Beispiel A2.3 liefert eine Funktion $h \in L^1(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften $\mathcal{F}(h) = \sqrt{2\pi} h$ und folglich

$$\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(h) = h.$$

Die Aussage $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = id$ kann aber nicht für alle Funktionen $h \in L^1(\mathbb{R})$ oder $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gelten, da für $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i.a. \hat{h} nicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt. Zur Vorbereitung des Fourier'schen Umkehrsatzes A2.6 beweisen wir zuerst einen wichtigen Zusammenhang zwischen Faltungsintegralen und der Fourier-Transformation.

Satz A2.4 Für alle $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Beweis Mit Hilfe des Satzes von Fubini auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int e^{-ix \cdot \xi} \left(\int f(x-y) g(y) dy \right) dx \\ &= \int e^{-iy \cdot \xi} g(y) \left(\int e^{-i(x-y) \cdot \xi} f(x-y) dx \right) dy \\ &= \left(\int e^{-iy \cdot \xi} g(y) dy \right) \hat{f}(\xi) \\ &= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

■

Lemma A2.5 *Es seien $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $h_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} h(\frac{x}{\varepsilon})$ für $\varepsilon > 0$ und*

$$H(\xi) := \hat{h}(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

- (i) *Für $\varepsilon > 0$ gilt $H(\varepsilon\xi) = \hat{h}_\varepsilon(\xi)$ und $h_\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(H(\varepsilon\cdot))$.*
- (ii) *Für jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ gilt*

$$f * h_\varepsilon(x) = \int H(\varepsilon\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\vec{\xi}$$

- (iii) *Für jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ gilt*

$$f * h_\varepsilon \rightarrow f \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}) \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Beweis

- (i) folgt mit Beispiel A2.3 und der Substitutionsregel.
- (ii) Mit dem Satz von Fubini und (i) liefert die Gleichungskette

$$\begin{aligned} f * h_\varepsilon(x) &= \int f(x-y) \left(\frac{1}{2\pi} \int H(\varepsilon\xi) e^{i\xi y} d\xi \right) dy \\ &= \int H(\varepsilon\xi) \left(\frac{1}{2\pi} \int f(x-y) e^{-i\xi(x-y)} dy \right) e^{i\xi x} d\xi \end{aligned}$$

die Behauptung. Man beachte $d\vec{\xi} = \frac{1}{2\pi} d\xi$.

- (iii) Da $\int h_\varepsilon(y) dy = \int h(y) dy = 1$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ist für fast alle $x \in \mathbb{R}$

$$\int f(x-y) h_\varepsilon(y) dy - f(x) = \int (f(x-y) - f(x)) h_\varepsilon(y) dy.$$

Mit dem Satz von Fubini folgert man bei beliebigem $\delta > 0$ die L^1 -Abschätzung

$$\begin{aligned} &\int \left| \int f(x-y) h_\varepsilon(y) dy - f(x) \right| dx \\ &\leq \int \left(\int |f(x-y) - f(x)| dx \right) h_\varepsilon(y) dy \\ &\leq \int_{|y| < \delta} \|f(\cdot - y) - f\|_1 h_\varepsilon(y) dy + 2\|f\|_1 \int_{|y| > \delta} h_\varepsilon(y) dy. \end{aligned}$$

Zu beliebigem $\eta > 0$ gibt es nach Satz A1.6 (v) ein $\delta > 0$ mit $\|f(\cdot - y) - f\|_1 < \frac{\eta}{2}$ für alle $|y| < \delta$. Für ein derart bestimmtes $\delta > 0$ gilt

$$\int_{|y| > \delta} h_\varepsilon(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|z| > \delta/\varepsilon} e^{-z^2/2} dz < \frac{\eta/2}{2\|f\|_1 + 1}$$

für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_{\eta, f}$. Fasst man die bisherigen Abschätzungen zusammen, erhält man

$$\|f * h_\varepsilon - f\|_1 < \eta$$

für $0 < \varepsilon < \varepsilon_{\eta, f}$. ■

Satz A2.6 (Fourierscher Umkehrsatz) Sind $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, gilt

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{f} = f \quad \text{f.ü.}$$

Beweis Im Beweis sei $n = 1$; der allgemeine Fall $n \geq 1$ folgt mit einer Verallgemeinerung von Lemma A2.5 für $n \geq 1$. Mit Lemma A2.5(ii) und dem Satz von Lebesgue gilt die punktweise Konvergenz

$$f * h_\varepsilon(x) = \int H(\varepsilon\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

da $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, $H(\varepsilon\xi) \rightarrow 1$ für $\varepsilon \rightarrow 0+$ und $|H(\varepsilon\xi)| \leq 1$.

Zudem konvergiert $f * h_\varepsilon(x)$ in $L^1(\mathbb{R})$ gegen f für $\varepsilon \rightarrow 0+$. Diese Aussage wird in Satz 5.19 zur Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswerten in $L^1(\mathbb{R}^n)$ detailliert bewiesen, denn h_ε stimmt mit dem eindimensionalen Wärmeleitungskern E_t für $t = \varepsilon^2$ (und $k = \frac{1}{2}$) überein; der Beweis von Satz 5.19 benutzt selbstverständlich nicht Satz A2.6. Jetzt folgt nach dem Satz von Riesz-Fischer (Satz A1.6(vi)) $f * h_{\varepsilon_j}(x) \rightarrow f(x)$ f.ü. punktweise für eine Folge (ε_j) mit $\varepsilon_j \rightarrow 0$ gilt. Also stimmt f f.ü. mit $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$ überein. ■

Korollar A2.7 Stimmen für Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Fourier-Transformierten \hat{f} und \hat{g} f.ü. überein, gilt $f = g$ (f.ü.).

Beweis Die Funktion $u = f - g$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz A2.6. Daraus folgt $u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) = \mathcal{F}^{-1}(0) = 0$ f.ü. ■

A2.2 Die Fourier-Transformation in $L^2(\mathbb{R}^n)$

Die Fourier-Transformation von $L^1(\mathbb{R}^n)$ läßt sich über ein Dichtheitsargument auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen ausdehnen. Auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ besitzt die wieder mit \mathcal{F} bezeichnete Fourier-Transformation besonders schöne Eigenschaften, denn sie ist dort ein isometrischer Isomorphismus, d.h. $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ist bijektiv, und es gilt $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Zur Vorbereitung dieses wichtigen Satzes beweisen wir diese Isometrie-Eigenschaft zuerst für die in $L^2(\mathbb{R}^n)$ dichte Teilmenge der C_0^∞ -Funktionen.

Satz A2.8 Für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sowie

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2,$$

wenn für die L^2 -Norm im Fourierraum $\tilde{d}\xi = (2\pi)^{-n}d\xi$ benutzt wird; d.h.

$$\|\hat{f}\|_2^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \tilde{d}\xi.$$

Beweis Der Einfachheit halber führen wir den Beweis nur für $n = 1$. Nach Satz A2.2 gelten $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi)$ und $\widehat{f^{(k)}}(\xi) \rightarrow 0$ für $|\xi| \rightarrow \infty$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$. Deshalb klingt $\hat{f}(\xi)$ schneller als jede Potenz $\frac{1}{|\xi|^k}$, $k \in \mathbb{N}$, ab; insbesondere liegt \hat{f} im Raum $L^2(\mathbb{R})$.

Neben f betrachtet man noch die Funktion $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, für die man sofort $\widehat{\tilde{f}}(\xi) = \widehat{\hat{f}}(\xi)$ und folglich mit Satz A2.4

$$|\hat{f}(\xi)|^2 = \hat{f}(\xi) \cdot \widehat{\tilde{f}}(\xi) = \mathcal{F}(f * \tilde{f})(\xi)$$

nachweist. Wir werden deshalb die Funktion $g := f * \tilde{f}$ genauer untersuchen. Wegen $f, \tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ gilt $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$,

$$g(0) = \int f(0-y) \overline{f(-y)} dy = \|f\|_2^2$$

und auf Grund der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|g(x)| = \left| \int f(x-y) \overline{f(-y)} dy \right| \leq \|f(x-\cdot)\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2^2.$$

Da g stetig und beschränkt ist und h in $L^1(\mathbb{R})$ liegt, folgt mit dem Satz von Lebesgue (Satz A1.8) für $\varepsilon \rightarrow 0+$

$$\begin{aligned} g * h_\varepsilon(0) &= \int g(-y) h_\varepsilon(y) dy = \int g(-\varepsilon y) h(y) dy \\ &\rightarrow \int g(0) h(y) dy = g(0). \end{aligned}$$

Andererseits beweisen Lemma A2.5 und der Satz von Lebesgue die Konvergenz

$$g * h_\varepsilon(0) = \int H(\varepsilon\xi) \hat{g}(\xi) \tilde{d}\xi \rightarrow \int \hat{g}(\xi) \tilde{d}\xi = \|\hat{f}\|_2^2$$

für $\varepsilon \rightarrow 0+$. Also gilt $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. ■

Satz A2.9 Die Fourier-Transformation \mathcal{F} auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ läßt sich in eindeutiger Weise zu einer wieder mit \mathcal{F} bezeichneten Abbildung

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \hat{f} = \mathcal{F}(f)$$

auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Diese Abbildung hat die folgenden Eigenschaften:

- (1) \mathcal{F} ist eine stetige, lineare und bijektive Abbildung. Ihre Inverse \mathcal{F}^{-1} ist eine Fortsetzung der in Satz A2.6 benutzten Fourier-Rücktransformation.
- (2) Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gelten die Formeln

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \quad (\text{Satz von Plancherel})$$

$$\int f \bar{g} dx = \int \hat{f} \bar{\hat{g}} d\xi \quad (\text{Formel von Parseval}).$$

- (3) Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gelten für $R \rightarrow \infty$

$$\int_{B_R(0)} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \rightarrow \hat{f}(\xi)$$

$$\int_{B_R(0)} \hat{f}(\xi) e^{+ix \cdot \xi} d\xi \rightarrow f(x)$$

im Sinne der L^2 -Konvergenz.

Beweis Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Nach Satz A1.6 (v) gibt es eine Folge $(f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, die bzgl. $\|\cdot\|_2$ gegen f konvergiert. Dann ist auch $(\hat{f}_k) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ eine Cauchy-Folge, denn mit Satz A2.8 gilt

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_\ell\|_2 = \|f_k - f_\ell\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{für } k, \ell \rightarrow \infty.$$

Da $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach Satz A1.6 (iv) vollständig ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\hat{f}_k \rightarrow \hat{f} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

gilt. Aus $\|\hat{f}_k\|_2 = \|f_k\|_2$ folgen außerdem $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ sowie die Aussage, dass \hat{f} nicht von der zuvor ausgewählten Folge (f_k) zur Approximation von f abhängt.

Ist $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, so gibt es in Verallgemeinerung von Satz A1.6 (v) sogar eine Folge $(f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, die in der L^2 - und in der L^1 -Norm gegen f konvergiert (ohne Beweis). In diesem Fall konvergiert (\hat{f}_k) auch bzgl. der L^∞ -Norm gegen $\mathcal{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)}(f) \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Mit Satz A1.6 (iv) schließt man

$$\hat{f} = \mathcal{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)}(f) \quad \text{f.ü.}$$

Also ist die soeben konstruierte Fourier-Transformation eine Fortsetzung der Fourier-Transformation von $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Analog zu \mathcal{F} auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ wird der Operator \mathcal{F}^{-1} auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ definiert. Insbesondere gilt $\|\mathcal{F}^{-1}g\|_2 = \|g\|_2$ für alle $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Um die entscheidende Aussage, dass \mathcal{F}^{-1} die Fourier-Rücktransformation ist, also $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = id$ gilt, zu beweisen, betrachte man zu $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ wieder eine approximierende Folge $(f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Da der Fouriersche Umkehrsatz (Satz

A2.6) auf f_k angewandt werden kann, gilt $f_k = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} f_k$, wobei für \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} die soeben definierten Operatoren auf L^2 -Räumen benutzt werden dürfen. Im Sinne der L^2 -Konvergenz folgt jetzt

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}_k) = \mathcal{F}^{-1}(\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_k) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} f.$$

Da analog $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = id$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ gezeigt werden kann, ist \mathcal{F} tatsächlich ein *Isomorphismus* und eine *Isometrie* auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Zum Beweis der Formel von Parseval benutzt man die elementare Identität

$$4f\bar{g} = |f + g|^2 - |f - g|^2 + i|f + ig|^2 - i|f - ig|^2.$$

Integration bzgl. $x \in \mathbb{R}^n$ und der bereits bewiesene Satz von Plancherel liefern dann die Gleichungskette

$$\begin{aligned} 4 \int f\bar{g} dx &= \|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2 + i\|f + ig\|_2^2 - i\|f - ig\|_2^2 \\ &= \|\hat{f} + \hat{g}\|_2^2 - \|\hat{f} - \hat{g}\|_2^2 + i\|\hat{f} + i\hat{g}\|_2^2 - i\|\hat{f} - i\hat{g}\|_2^2 \\ &= 4 \int \hat{f} \bar{\hat{g}} d\xi. \end{aligned}$$

Damit sind (1) und (2) bewiesen.

(3) Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben, und sei χ_R die charakteristische Funktion der Kugel $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, d.h., $\chi_R(x) = 1$ für $x \in B_R(0)$ und $\chi_R(x) = 0$ sonst. Aufgrund der Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f\chi_R| dx = \int_{B_R(0)} |f(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{B_R(0)} 1 dx \right)^{1/2} < \infty$$

liegt $f\chi_R$ in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Ferner liefert der Satz von Lebesgue die Konvergenz

$$f\chi_R \rightarrow f \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } R \rightarrow \infty,$$

woraus mit dem Satz von Plancherel

$$\|\widehat{f\chi_R} - \hat{f}\|_2 = \|f\chi_R - f\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty$$

folgt. Damit ist der Beweis der ersten Behauptung von (3) abgeschlossen. Der zweite Teil wird genauso bewiesen. ■

A3 Fourier-Reihen

Das Ziel in der Theorie der Fourier-Reihen ist die Entwicklung von 2π -periodischen Funktionen in die Grundschwingungen $\sin x$ und $\cos x$ sowie die Oberschwingungen $\sin nx$ und $\cos nx$, $n \geq 2$. Da $\sin \lambda x$ und $\cos \lambda x$ Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$u'' + \lambda^2 u = 0$$

sind, gestattet die Darstellung einer Funktion f als unendliche *trigonometrische Reihe*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (\text{A3.1})$$

häufig die explizite Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.

Lemma A3.1 *Eine Funktion $f \in C^0[-\pi, \pi]$ besitze die auf $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig konvergente Reihendarstellung (A3.1). Dann gilt*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n \geq 0, \quad (\text{A3.2})$$

sowie

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\pi \, dx, \quad n \geq 1. \quad (\text{A3.3})$$

Beweis Integriert man $f(x) \cos kx$, $k \geq 0$, bzw. $f(x) \sin kx$, $k \geq 1$, auf $[-\pi, \pi]$, so dürfen wegen der gleichmäßigen Konvergenz in (A3.1) Integration und Reihenbildung vertauscht werden. Eine kleine Rechnung beweist die *Orthogonalitätsrelationen*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx = \delta_{n,k} := \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx \, dx &= 0, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0 \end{aligned} \quad (\text{A3.4})$$

für alle $k, n \geq 1$ sowie $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 1$. Daraus folgen die Integraldarstellungen von a_n und b_n . Insbesondere impliziert die Darstellung von a_0 den Faktor $\frac{1}{2}$ vor a_0 in (A3.1). ■

Definition A3.2 Sei $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Dann heißen die in Lemma A3.1 benutzten Größen a_n , $n \geq 0$, und b_n , $n \geq 1$, die *Fourier-Koeffizienten*, und die unendliche Reihe in (A3.1) heißt die *Fourier-Reihe* von f . Da für $f \in L^1(-\pi, \pi)$ oder auch $f \in C^0[-\pi, \pi]$ die punktweise oder sogar gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe i.a. nicht gesichert ist oder die Fourier-Reihe in einem Punkt x nicht gegen „ $f(x)$ “ konvergiert, schreiben wir kurz

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

wenn die Fourier-Koeffizienten a_n, b_n von f wie in Lemma A3.1 definiert sind.

Um eine kürzere Darstellung der Fourier-Reihe (A3.1) zu gewinnen, benutzen wir die Formeln

$$\sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}), \quad \cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}).$$

Damit läßt sich (A3.1) auch in der Form

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit $c_0 = \frac{a_0}{2}$ und

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k \geq 1, \quad (\text{A3.5})$$

schreiben. Die (c_k) werden wieder Fourier-Koeffizienten von f genannt und nach (A3.2) – (A3.3) aus

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A3.6})$$

berechnet. Schließlich vereinfachen sich die Orthogonalitätsrelationen (A3.4) zu

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-ikx} dx = \delta_{n,k}.$$

Die komplexwertige Darstellung einer (u.U. komplexwertigen) Funktion $f \in L^1(-\pi, \pi)$ lautet also

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^k c_k e^{ikx} \quad (\text{A3.7})$$

mit den Fourier-Koeffizienten c_k , $k \in \mathbb{Z}$, aus (A3.6). Mit Hilfe der einfachen Formeln

$$a_k = (c_k + c_{-k}), \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad (\text{A3.8})$$

gelangt man zur reellen Darstellung zurück.

Satz A3.3 (Lemma von Riemann-Lebesgue) Für $f \in L^1(-\pi, \pi)$ gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-irx} dx \rightarrow 0 \quad \text{für } |r| \rightarrow \infty.$$

Insbesondere konvergieren die Folgen (c_k) für $|k| \rightarrow \infty$ und (a_n) , (b_n) für $n \rightarrow \infty$ gegen 0.

Beweis Wir setzen f durch 0 zur Funktion $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$ fort und schreiben $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-irx} dx = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)e^{-irx} dx$. Wegen $e^{-ir(x+\pi/r)} = -e^{-irx}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)e^{-irx} dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)(e^{-irx} - e^{-ir(x+\pi/r)}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x - \frac{\pi}{r})) dx \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $r \rightarrow \infty$ nach Satz A1.6 (vi) (Stetigkeit im L^1 -Mittel). ■

Lemma A3.4 Für $f \in L^1(-\pi, \pi)$ bezeichne $s_N(x)$ die N -te Fourier-Partialsumme

$$s_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Dann gilt

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt \quad (\text{A3.9})$$

mit dem sog. Dirichlet-Kern

$$D_N(t) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t}.$$

Insbesondere ist D_N eine gerade, 2π -periodische Funktion mit der Eigenschaft

$$\int_0^{\pi} D_N(t) dt = \pi.$$

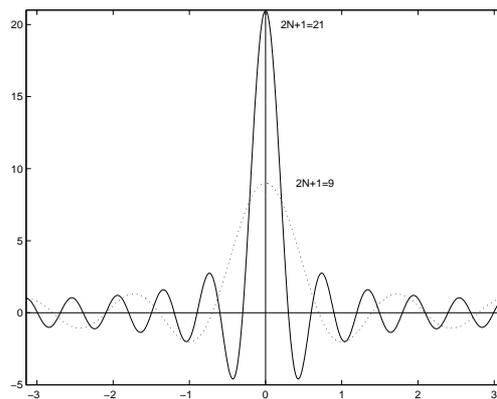


Abbildung A3.1: Der Dirichlet-Kern D_N für $N = 4$ und $N = 10$

Beweis Nach (A3.6) gilt

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-N}^N e^{ik(x-t)} dt,$$

wobei der Integralkern

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \sum_{k=-N}^N e^{ikt} = e^{-iNt} \sum_{k=0}^{2N} (e^{it})^k = e^{-iNt} \frac{1 - e^{it(2N+1)}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{e^{it(N+1/2)} - e^{-it(N+1/2)}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} \end{aligned}$$

ist. Offensichtlich ist D_N gerade und 2π -periodisch. Schließlich folgt für $f \equiv 1$, also $s_N \equiv 1$, die Integralbedingung $\int_0^\pi D_N = \pi$. ■

Wie Abbildung A3.1 zeigt, ist der Dirichlet-Kern für großes N eine stark oszillierende Funktion. Zudem kann man zeigen, dass die L^1 -Normen $\|D_N\|_1$ auf $[-\pi, \pi]$ für $N \rightarrow \infty$ wie $\log N$ anwachsen. Deshalb lassen sich die Methoden, mit denen für die Laplace-Gleichung die Annahme von Randwerten und für die Wärmeleitungsgleichung die Annahme des Anfangswertes gezeigt werden, nicht ohne weiteres auf die Konvergenzanalyse $s_N(x) \rightarrow f(x)$ für $N \rightarrow \infty$ übertragen.

Satz A3.5 Sei $f \in L^1(-\pi, \pi)$ in der Umgebung eines Punktes $x \in (-\pi, \pi)$ differenzierbar oder auch nur Hölder-stetig, d.h., es gibt einen Exponenten $\alpha \in (0, 1]$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$|f(t) - f(t')| \leq c|t - t'|^\alpha \quad \text{für alle } t, t' \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$$

gilt. Dann konvergiert die Fourier-Reihe in x gegen $f(x)$, also

$$s_N(x) \rightarrow f(x) \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Beweis Nach Voraussetzung soll f in einer Umgebung $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, von x f.ü. mit einer in x differenzierbaren oder auf $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ Hölder-stetigen Funktion übereinstimmen. Ohne Einschränkung werde diese Funktion wieder mit f bezeichnet. Man beachte, dass nach dem Mittelwertsatz eine Funktion $f \in C^1[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ Hölder-stetig mit jedem Exponenten $\alpha \in (0, 1]$ ist. Ferner ist es vorteilhaft, f 2π -periodisch auf \mathbb{R} fortzusetzen, so dass (A3.9) auch in der Form

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_N(t) dt$$

geschrieben werden kann. Mit Lemma A3.4 folgt dann

$$\begin{aligned} s_N(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t+x) - f(x)) D_N(t) dt \\ &=: \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \end{aligned}$$

mit

$$g(t) = \frac{f(t+x) - f(x)}{t} \cdot \frac{t}{\sin \frac{t}{2}}.$$

Nach Voraussetzung ist $|f(t+x) - f(x)| \leq c|t|^\alpha$ für $|t| \leq \varepsilon$, so dass wegen $|t/\sin(t/2)| \leq \pi$ die Funktion g auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$ durch die L^1 -Funktion $c\pi|t|^{\alpha-1}$ abgeschätzt werden kann. Da g auf $[-\pi, -\varepsilon]$ und auf $[\varepsilon, \pi]$ integrierbar ist, folgt $g \in L^1(-\pi, \pi)$. Dann liefert das Lemma von Riemann-Lebesgue (Satz A3.3) die Behauptung $s_N(x) - f(x) \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$. ■

Satz A3.5 gilt in abgewandelter Form, falls f in x eine Sprungunstetigkeit hat.

Satz A3.6 Die Funktion $f \in L^1(-\pi, \pi)$ sei unstetig in $x \in (-\pi, \pi)$, besitze jedoch einseitige Grenzwerte

$$f(x+) = \lim_{h \rightarrow 0+} f(x+h) \quad \text{und} \quad f(x-) = \lim_{h \rightarrow 0+} f(x-h).$$

Ferner sei f in x rechts- und linksseitig differenzierbar, d.h.,

$$f'(x\pm) := \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} (f(x \pm h) - f(x\pm))$$

existiere. Dann gilt

$$s_N(x) \rightarrow \frac{1}{2} (f(x+) + f(x-)) \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Beweis Nach Voraussetzung stimmt f in einer Umgebung von x f.ü. mit einer Funktion überein, für die $f(x\pm)$ und $f'(x\pm)$ existieren. Analog zum Beweis von Satz A3.5 gilt hier

$$s_N(x) - \frac{1}{2} (f(x+) + f(x-)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(N + \frac{1}{2})t \, dt$$

mit der Funktion

$$g(t) = \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \cdot \begin{cases} \frac{1}{t} (f(x+t) - f(x-)), & t \in (-\pi, 0) \\ \frac{1}{t} (f(x+t) - f(x+)), & t \in (0, \pi) \end{cases}.$$

Wieder ist in einer kleinen Umgebung von $t = 0$ die Funktion $g(t)$ auf Grund der Voraussetzungen an f im Punkt x beschränkt, so dass $g \in L^1(-\pi, \pi)$ folgt. Dann beweist das Lemma von Riemann-Lebesgue die Konvergenz von $s_N(x)$ gegen den Mittelwert $\frac{1}{2} (f(x+) + f(x-))$. ■

Beispiele A3.7 (1) Die Vorzeichenfunktion $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases}$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz A3.6. Als Fourier-Koeffizienten berechnet man $c_0 = 0$ und $c_k = \frac{i}{\pi k} (e^{-ik\pi} - 1)$, also

$$c_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi ki}, & k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Die Fourier-Reihe von f lautet deshalb

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Nach Satz A3.6 konvergiert $s_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ gegen -1 für $x \in (-\pi, 0)$, gegen $+1$ für $x \in (0, \pi)$ und gegen $0 = \frac{1}{2}(1-1)$ für $x = 0$ (hier gilt jedoch bereits $s_N(0) = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$).

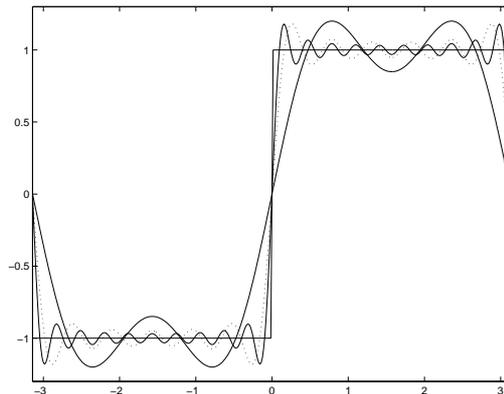


Abbildung A3.2: Die Fourier-Partialsummen s_N , $N = 3, 9$ und 19 , zu $f(x) = \operatorname{sgn} x$

Die Konvergenz der Fourier-Reihe $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ gegen f kann auf dem gesamten Intervall $[-\pi, \pi]$ *nicht gleichmäßig* sein, da andernfalls f als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge stetiger Funktionen ebenfalls stetig sein müsste. Dagegen ist die Konvergenz in jedem kompakten Intervall $[-\pi + \varepsilon, -\varepsilon]$ und $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, gleichmäßig, s. Satz A3.15.

Ferner fällt auf, dass die Fourier-Reihe von f eine reine *sinus-Reihe* ist: da f ungerade bzgl. 0 ist, verschwinden alle Fourier-Koeffizienten a_k , $k \in \mathbb{N}_0$.

- (2) Die Funktion $\tilde{f}(x) = |x|$, $x \in (-\pi, \pi)$, kann als stetige und stückweise stetig differenzierbare, 2π -periodische Funktion auf \mathbb{R} fortgesetzt werden. Als

Fourier-Koeffizienten berechnet man $\tilde{c}_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\tilde{c}_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{-2}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

so dass die Fourier-Reihe

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

der geraden Funktion $|x|$ eine reine *cosinus-Reihe* ist. Wegen der quadratisch abklingenden Koeffizienten $(2k+1)^{-2}$ konvergiert diese Reihe auf $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig gegen $|x|$.

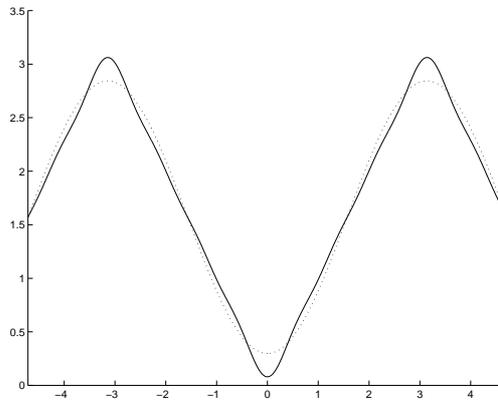


Abbildung A3.3: Die Fourier-Partialsummen s_N , $N = 1$ und 7 , zu $\tilde{f}(x) = |x|$

In $x = 0$ erhält man die Identität $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2}$, also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Die Bestimmung der Fourier-Koeffizienten \tilde{c}_k konnte in diesem Beispiel mit Hilfe einer partiellen Integration aus Teil (1) gewonnen werden: wegen $\frac{d}{dx} |x| = \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$, gilt für $k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x e^{-ikx} dx = \frac{+ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} dx = ik\tilde{c}_k.$$

Lemma A3.8 (1) Die Funktion $f \in C^0(\mathbb{R})$ sei 2π -periodisch und besitze eine „schwache Ableitung“ $f' \in L^1(-\pi, \pi)$ im folgenden Sinne: für jede 2π -periodische Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ sei die partielle Integration

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \varphi' dx = - \int_{-\pi}^{\pi} f' \varphi dx \quad (\text{A3.10})$$

erlaubt. Bezeichnen (c_k) bzw. (c'_k) die Fourier-Koeffizienten von f bzw. von f' , gilt

$$c'_k = ikc_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- (2) Für eine 2π -periodische C^m -Funktion, $m \geq 0$, klingen die Fourier-Koeffizienten wie $o(|k|^{-m})$ für $k \rightarrow \pm\infty$ ab. Insbesondere konvergiert die Fourier-Reihe punktweise in $[-\pi, \pi]$ gegen f , falls $m \geq 1$ ist, und sogar gleichmäßig, falls $m \geq 2$ ist.

Beweis

- (1) folgt mit $\varphi(x) = e^{-ikx}$ aus einer partiellen Integration.
- (2) Ist $f \in C^m(\mathbb{R})$ 2π -periodisch, gilt $c_k^{(m)} = (ik)^m c_k$ für die Fourier-Koeffizienten $(c_k^{(m)})$ von $f^{(m)}$, wenn (c_k) die Fourier-Koeffizienten von f bezeichnet. Da nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue $|c_k^{(m)}| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \pm\infty$, folgt $|c_k| = o(|k|^{-m})$. Ist $m \geq 1$, konvergiert die Fourier-Reihe nach Satz A3.5 punktweise in $[-\pi, \pi]$ gegen f . Im Fall $m \geq 2$ ist diese Konvergenz wegen $|c_k| = o(|k|^{-2})$ sogar gleichmäßig. ■

Ein typisches Beispiel einer Funktion mit „schwacher L^1 -Ableitung“ ist eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion f auf $[-\pi, \pi]$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$. In diesem Fall ist f' eine stückweise stetige Funktion mit endlich vielen Sprungstellen.

Eine einheitliche und elegante Konvergenzanalyse von Fourier-Reihen ist im Rahmen von Funktionen im Raum $L^2(-\pi, \pi)$ möglich, für die es eine bijektive Beziehung zur Menge aller quadratsummierbaren Folgen (c_k) , d.h. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, der Fourier-Koeffizienten gibt, s. Satz A3.14. Zur Analysis (komplexwertiger) L^2 -Funktionen ist es hilfreich, neben der L^2 -Norm $\|\cdot\|_2$ das Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \quad \text{für } f, g \in L^2(-\pi, \pi) \quad (\text{A3.11})$$

zu benutzen, für das definitionsgemäß

$$(f, f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2$$

gilt. Man beachte, dass das Integral in (A3.11) nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz für alle $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ existiert. Bekanntlich hat das Skalarprodukt (\cdot, \cdot) die folgenden Eigenschaften ($f, g, h \in L^2(-\pi, \pi)$, $\lambda \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} (f, f) &\geq 0 \quad \text{und} \quad (f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad (\text{in } L^2(-\pi, \pi)) \\ (f, g) &= \overline{(g, f)} \\ (f + g, h) &= (f, h) + (g, h), \quad (f, g + h) = (f, g) + (f, h) \\ (\lambda f, g) &= \lambda(f, g) = (f, \overline{\lambda}g). \end{aligned} \quad (\text{A3.12})$$

Definition A3.9 Eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ von Funktionen in $L^2(-\pi, \pi)$ heißt *Orthogonalsystem* in $L^2(-\pi, \pi)$, kurz: *OGS*, falls für das Skalarprodukt (\cdot, \cdot) auf $L^2(-\pi, \pi)$

$$\begin{aligned} (\varphi_n, \varphi_m) &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) \overline{\varphi_m(t)} dt = 0 && \text{für alle } n \neq m, \\ (\varphi_n, \varphi_n) &= \|\varphi_n\|_2^2 > 0 && \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (\text{A3.13})$$

gilt. Falls sogar die Normierungsbedingung $\|\varphi_n\|_2 = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist, heißt (φ_n) ein *Orthonormalsystem*, kurz: *ONS*.

Beispiele A3.10 (1) $\{\varphi_n(t) = e^{int}, n \in \mathbb{Z}\}$ definiert ein OGS. Wegen $\|\varphi_n\|_2^2 = 2\pi$ ist $\{\frac{\varphi_n}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\}$ ein ONS auf $L^2(-\pi, \pi)$.

(2) $\{\cos nt : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\sin nt : n \in \mathbb{N}\}$ ist ein OGS. Dagegen ist $\{\frac{1}{2\pi}; \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{\sin nt}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{N}\}$ ein ONS.

Satz A3.11 Sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein Orthogonalsystem auf $L^2(-\pi, \pi)$, und sei $f \in L^2(-\pi, \pi)$ gegeben. Dann wird für jedes $N \in \mathbb{N}$ das Minimum der sog. L^2 -Bestapproximation

$$E_N = \|f - \sum_{|n| \leq N} k_n \varphi_n\|_2^2 \quad \text{mit beliebigen } k_n \in \mathbb{C}$$

von f durch die Fourier-Koeffizienten

$$k_n = c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|_2^2} (f, \varphi_n) \quad (\text{A3.14})$$

angenommen. Der minimale Fehler $\min\{E_N : k_n \in \mathbb{C}, |n| \leq N\}$ ist

$$\|f - \sum_{|n| \leq N} c_n \varphi_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{|n| \leq N} |c_n|^2 \|\varphi_n\|_2^2. \quad (\text{A3.15})$$

Beweis Für die Approximierende $s_N = \sum_{|n| \leq N} k_n \varphi_n$ gilt mit (A3.11) die Fehlerdarstellung

$$\begin{aligned} E_N &= \|f - s_N\|_2^2 = (f - s_N, f - s_N) \\ &= (f, f) - 2 \operatorname{Re}(f, s_N) + (s_N, s_N) \\ &= \|f\|_2^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{|n| \leq N} \overline{k_n} (f, \varphi_n) + \sum_{|n| \leq N} |k_n|^2 \|\varphi_n\|_2^2 \\ &\quad (\text{da } (\varphi_n) \text{ ein OGS ist}) \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{|n| \leq N} (|k_n|^2 - 2 \operatorname{Re} \overline{k_n} c_n) \|\varphi_n\|_2^2 \quad (\text{mit (A3.14)}) \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{|n| \leq N} |k_n - c_n|^2 \|\varphi_n\|_2^2 - \sum_{|n| \leq N} |c_n|^2 \|\varphi_n\|_2^2. \end{aligned}$$

Der Fehler E_N wird also minimal für $k_n = c_n$, $|n| \leq N$; für diese Wahl gilt (A3.15). ■

Korollar A3.12 Sei (φ_n) ein OGS auf $L^2(-\pi, \pi)$, und sei $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Dann gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{|n| \leq N} |c_n|^2 \|\varphi_n\|_2^2 \leq \|f\|_2^2. \quad (\text{A3.16})$$

Insbesondere gelten für die Fourier-Koeffizienten aus (A3.2), (A3.3) und (A3.6) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt, \\ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Beweis Die Besselsche Ungleichung folgt sofort aus (A3.15). ■

Satz A3.13 Die Funktion $f \in C^0(\mathbb{R})$ sei 2π -periodisch und besitze eine schwache Ableitung f' , s. Lemma A3.8, in $L^2(-\pi, \pi)$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$ gegen f .

Beweis Da $f' \in L^2(-\pi, \pi)$ in $L^1(-\pi, \pi)$ liegt, gilt nach Lemma A3.8 für die Fourier-Koeffizienten $c_k = c_k(f)$ und $c'_k = c_k(f')$

$$|c_k| = \frac{1}{|k|} |c'_k| \quad \text{für alle } k \neq 0.$$

Für die Fourier-Partialsumme $s_N(x) = \sum_{|k| \leq N} c_k e^{ikx}$ von f folgt daraus für $0 < N < M$ und für $x \in [-\pi, \pi]$ die Abschätzung

$$|s_M(x) - s_{N-1}(x)| = \left| \sum_{N \leq |k| \leq M} c_k e^{ikx} \right| \leq \sum_{N \leq |k| \leq M} \frac{1}{|k|} |c'_k|.$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und Korollar A3.12 erhält man dann

$$\|s_M - s_N\|_{\infty} \leq \left(\sum_{N \leq |k| \leq M} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c'_k|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2\pi} \|f'\|_2^2 \left(\sum_{N \leq |k| \leq M} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2}.$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$ ist, ist $(s_N)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $C^0[-\pi, \pi]$ und konvergiert gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$ gegen eine stetige Grenzfunktion \tilde{f} .

Um $f = \tilde{f}$ zu zeigen, reicht es, nach Satz A3.5 die punktweise Hölder-Stetigkeit von f zu beweisen. Dazu betrachte man für beliebige Punkte $-\pi < x_1 < x_2 < \pi$

stetige, stückweise lineare Funktionen φ mit $\varphi(x) = 1$ in $[x_1, x_2]$, $\varphi(x) = 0$ für $x < x_1 - \varepsilon$ und für $x > \frac{x}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ genügend klein. Aus der Formel zur partiellen Integration (A3.10), in der auch φ als Testfunktion benutzt werden darf, folgt

$$-\int_{x_1-\varepsilon}^{x_2+\varepsilon} f' \varphi \, dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1} f \, dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon} f \, dt.$$

Da f stetig ist, gilt im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0+$

$$-\int_{x_1}^{x_2} f' \, dt = f(x_1) - f(x_2)$$

und folglich mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f'(t)| \, dt \leq |x_2 - x_1|^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Auf Grund der Periodizität von f erhält man die gleiche Hölder-Abschätzung $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \|f'\|_2 |x_2 - x_1|^{1/2}$ auch für $x_1 = -\pi$ bzw. $x_2 = +\pi$. ■

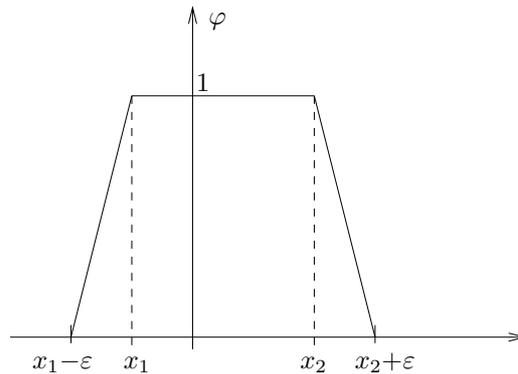


Abbildung A3.4: Die Testfunktion φ

Satz A3.14 (1) Für jede $L^2(-\pi, \pi)$ -Funktion f konvergiert die Fourier-Partiellsumme s_N in der L^2 -Norm gegen f . Ferner gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2. \quad (\text{A3.17})$$

(2) Für jede Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ komplexer Zahlen mit $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ gibt es genau eine Funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$, so dass (c_k) die Fourier-Koeffizienten von f sind.

Beweis

- (1) Sei $f \in L^2(-\pi, \pi)$, $\varepsilon > 0$, und sei g eine 2π -periodische C^1 -Funktion mit $\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$, s. Satz A1.6 (v) mit $\Omega = (-\pi, \pi)$. Nach Satz A3.13 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|g - s_n(g)\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|g - s_n(g)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Ferner gilt für die Fourier-Partialsummen $s_n(f)$ und $s_n(g)$ nach (A3.12), (A3.13)

$$\begin{aligned} \|s_n(f) - s_n(g)\|_2^2 &= \|s_n(f - g)\|_2^2 = \left\| \sum_{|k| \leq n} c_k(f - g) \varphi_k \right\|_2^2 \\ &= \sum_{|k| \leq n} |c_k(f - g)|^2 \|\varphi_k\|_2^2 \leq \|f - g\|_2^2, \end{aligned}$$

wobei $c_k(f - g)$ den k -ten Fourier-Koeffizienten von $f - g$ bezeichnet. Zusammengefasst erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f - s_n(f)\|_2 &\leq \|f - g\|_2 + \|g - s_n(g)\|_2 + \|s_n(g) - s_n(f)\|_2 \\ &\leq 2\|f - g\|_2 + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N. \end{aligned}$$

Schließlich gilt nach Satz A3.11 und dem zuvor bewiesenen Teil

$$\|f\|_2^2 - \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$; damit ist auch (A3.17) bewiesen.

- (2) Es gelte $\sum |c_k|^2 < \infty$. Dann genügen die Partialsummen $s_N(x) = \sum_{|k| \leq N} c_k e^{ikx}$ nach (A3.12), (A3.13) für $0 < N < M$ der L^2 -Abschätzung

$$\|s_M - s_{N-1}\|_2^2 = \left\| \sum_{N \leq |k| \leq M} c_k e^{ikx} \right\|_2^2 = 2\pi \sum_{N \leq |k| \leq M} |c_k|^2.$$

Folglich ist $(s_N)_{N=0}^\infty$ eine Cauchy-Folge in $L^2(-\pi, \pi)$, und nach Satz A1.6 (iv) gibt es ein $f \in L^2(-\pi, \pi)$ mit $\|f - s_N\|_2 \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$. Aus dieser L^2 - und somit auch L^1 -Konvergenz folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_N(x) e^{-ikx} dx = c_k. \quad \blacksquare$$

Anschließend soll noch die Frage der gleichmäßigen Konvergenz auf Teilintervallen von $(-\pi, \pi)$ beantwortet werden, vgl. Beispiel A3.7 (2).

Satz A3.15 Die Funktion $f \in L^1(-\pi, \pi)$ stimme auf dem offenen Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (-\pi, \pi)$ mit einer C^1 -Funktion überein. Dann konvergiert die Folge der Fourier-Partialsommen s_N auf jedem kompakten Teilintervall $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $0 < \delta < \varepsilon$, von $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ gleichmäßig gegen f .

Beweis Wir wählen eine Abschneidefunktion $\varphi \in C_0^\infty(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mit $\varphi(x) = 1$ in $[x_0 - \delta', x_0 + \delta']$, $\delta < \delta' < \varepsilon$, so dass $f\varphi$ als eine C^1 -Funktion auf $(-\pi, \pi)$ betrachtet werden kann. Nach Satz A3.13 konvergiert die Folge der Fourier-Partialsommen $(s_N(f\varphi))_N$ gleichmäßig auf $[-\pi, \pi]$ gegen $f\varphi$, also auf $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ gleichmäßig gegen f . Folglich bleibt zu zeigen, dass die Folge der Fourier-Partialsommen $(s_N(f(1 - \varphi)))_N$ gleichmäßig auf $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ gegen 0 konvergiert. Mit den Abkürzungen $g = f(1 - \varphi)$ und $r = N + \frac{1}{2}$ gilt nach Lemma A3.4

$$\begin{aligned} s_N(g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t+x) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(t+x)}{\sin \frac{t}{2}} \sin rt dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(t+x)}{\sin \frac{t}{2}} \left(\sin rt - \sin r\left(t + \frac{\pi}{r}\right) \right) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{g(t+x)}{\sin \frac{t}{2}} - \frac{g\left(t+x - \frac{\pi}{r}\right)}{\sin \frac{t-\pi/r}{2}} \right) \sin rt dt. \end{aligned}$$

Da g auf $[x_0 - \delta', x_0 + \delta']$ verschwindet, gilt auch für jedes $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$h_x(t) := \frac{g(t+x)}{\sin \frac{t}{2}} = 0 \quad \text{für } |t| < \delta' - \delta;$$

ferner ist $h_x \in L^1(-\pi, \pi)$. Deshalb konvergiert

$$\begin{aligned} |s_N(g)(x)| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| h_x(t) - h_x\left(t - \frac{\pi}{r}\right) \right| dt \\ &\leq C \int_{-\pi}^{\pi} \left| g(t+x) - g\left(t+x - \frac{\pi}{r}\right) \right| dt \\ &\quad + c \int_{\substack{t \in [\pi, \pi] \\ |t| \geq (\delta' - \delta)/2}} \left| g\left(t+x - \frac{\pi}{r}\right) \right| \left| \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{t-\pi/r}{2}} \right| dt \end{aligned}$$

gleichmäßig bzgl. $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ nach Satz A1.6 (vi) für $r \rightarrow \infty$ gegen 0. ■