Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 08/09 3./4.2.2009

Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen

7. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Lorenz-System)

Das *Lorenz-System* (vgl. Vorlesung bzw. Skript Kapitel IV) ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) &=& c_1(y(t)-x(t)), \\ y'(t) &=& c_2 x(t) - y(t) - x(t)z(t), \\ z'(t) &=& x(t)y(t) - c_3 z(t), \end{array} \right. \tag{1}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Für $0 < c_2 < 1$ ist die Nulllösung von (1) asymptotisch stabil.

(ii) Für $c_2 > 1$ ist die Nulllösung von (1) instabil.

Was lässt sich im Fall $c_2 = 1$ aussagen?

Hinweis: Um Aussage (i) zu beweisen, benutzen Sie, wie im Skript Kapitel IV angegeben, die Ljapunov-Funktion $L(x, y, z) := x^2 + c_1 y^2 + c_1 z^2$.

LÖSUNG: Wir schreiben $f(x, y, z) := (c_1(y - x), c_2 x - y - xz, xy - c_3 z)^{\mathrm{T}}$. Für die angegebene Funktion L gilt offenbar

$$L(0,0,0) = 0 \quad \text{und} \quad L(x,y,z) > 0 \quad \text{für alle } x, y, z \neq 0.$$

Außerdem gilt

$$\dot{L}(x,y,z) = \langle \nabla L(x,y,z) | f(x,y,z) \rangle = -2c_1x^2 - 2c_1y^2 - 2c_1c_3z^2 + 2c_1xy(1 + c_2).$$

Für $0 < c_2 < 1$ gilt $\dot{L}(x, y, z) < 0$ für alle $x, y, z \neq 0$, d.h. die Funktion L ist eine strikte Ljapunov-Funktion von (1). Die Aussage (i) folgt nun aus Kapitel IV, Theorem 2.2.

Um Aussage (ii) zu beweisen, berechnen wir zunächst die Eigenwerte von

$$Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} -c_1 & c_1 & 0 \\ c_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist gerade durch $p(\lambda) = -(c_3 + \lambda)(\lambda^2 + (c_1 + 1)\lambda + c_1 - c_1c_2)$ gegeben. Als Eigenwerte erhält man somit

$$\lambda_1 = -c_3 \quad \text{und} \quad \lambda_{2/3} = -\frac{c_1+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(c_1+1)^2}{4} - c_1 + c_1c_2}.$$

Im Fall $c_2 > 1$ sieht man, dass ein Eigenwert positiv ist und Aussage (ii) folgt somit nun aus dem Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3).

Für $c_2 = 1$ gilt

$$\dot{L}(x,y,z) = \langle \nabla L(x,y,z) | f(x,y,z) \rangle = -2c_1x^2 - 2c_1y^2 - 2c_1c_3z^2 + 4c_1xy = -2c_1(x+y)^2 - 2c_3z^2.$$

In diesem Fall ist also L immer noch eine Ljapunov-Funktion, allerdings nicht mehr strikt. Aus Kapitel IV, Theorem 2.2 folgt nun, dass die Nulllösung in diesem Fall stabil ist.

(G 2)

Sei $L > 0$. Wir betrachten das folgende Eigenwertproblem

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) &= 0, \qquad t \in (0,L), \\ y(0) &= 0, \\ y(L) &= 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für $\lambda \leq 0$ nur die triviale Lösung $u \equiv 0$ exisitiert.

(b) Geben Sie alle $\lambda > 0$ an, für die nichttriviale Lösungen, d.h. Lösungen $u \not\equiv 0$, existieren und geben Sie außerdem in diesen Fällen jeweils eine Lösung an.

Bemerkung: In dieser Aufgabe haben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des eindimensionalen *Laplace-Operators* auf einem Intervall $[0, L]$ berechnet.

LÖSUNG: (a) *1. Fall* $\lambda = 0$:
Jede Lösung von $y''(t) = 0$ ist von der Form $u(t) = c_1t + c_2$. Um die Randbedingungen zu erfüllen ist $c_1 = c_2 = 0$ die einzige mögliche Wahl, d.h. $u \equiv 0$ ist die einzige Lösung.

2. Fall $\lambda < 0$:
Jede Lösung von $y''(t) + \lambda y(t) = 0$ ist von der Form $u(t) = c_1 \cosh \sqrt{-\lambda}t + c_2 \sinh \sqrt{-\lambda}t$ (dies folgt durch "scharfes Hinsehen" oder durch Anwenden von Kapitel III, Satz 5.3). Um die Randbedingungen zu erfüllen ist wiederum $c_1 = c_2 = 0$ die einzige mögliche Wahl, d.h. $u \equiv 0$ ist die einzige Lösung.

(b) Für $\lambda > 0$ ist jede Lösung von $y''(t)+\lambda y(t) = 0$ ist von der Form $u(t) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}t + c_2 \sin \sqrt{\lambda}t$ (dies folgt wiederum durch "scharfes Hinsehen" oder durch Anwenden von Kapitel III, Satz 5.3). Die Randbedingung $u(0) = 0$ impliziert $c_1 = 0$, während $u(L) = 0$ die Bedingung $c_2 \sin \sqrt{\lambda}L = 0$ impliziert. Die letztere Bedingung ist für $\sqrt{\lambda}L = n\pi$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Somit exisiteren für $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n \in \mathbb{Z}$ nichttriviale Lösungen. Eine nichttriviale Lösung ist jeweils durch $u(t) = c \sin \frac{n\pi}{L}t$ für eine Konstante c gegeben.

(G 3)

Gegeben seien die folgenden beiden Differentialgleichungssysteme:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} x'(t) &= x(t)y^2(t) + x^2(t)y(t) + x^3(t), \\ y'(t) &= -x^3(t) + y^3(t), \end{cases} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{cases} x'(t) &= -2x(t)y(t), \\ y'(t) &= x^2(t) - y^3(t). \end{cases}$$

Bestimmen Sie jeweils das Stabilitätsverhalten der Nulllösung. Betrachten Sie dazu Funktionen der Form $L(x,y) := ax^2 + by^2$, wobei a, b Konstanten sind, die noch gewählt werden müssen.

LÖSUNG: Wir betrachten hier die Funktion $L(x,y) := Ax^2+By^2$ als mögliche Ljapunov-Funktion. Es gilt $L(0,0) = (0,0)$ und für $A, B > 0$ gilt $L(x,y) > (0,0)$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$.

Wir beginnen mit System (i): Wir schreiben $f(x,y) := (xy^2 + x^2y + x^3, -x^3 + y^3)^{\mathrm{T}}$ und erhalten

$$\dot{L}(x,y,z) = \langle \nabla L(x,y) | f(x,y) \rangle = 2Ax^2y^2 + 2Ax^3y + 2Ax^4 - 2Byx^3 + 2By^4.$$

Wählen wir z.B. $A = B = 1$ so erhalten wir $\dot{L}(x,y,z) = 2x^2y^2 + 2x^4 + 2y^4 > 0$ für alle $(x,y) \neq 0$. Nach Kapitel IV, Theorem 2.3 ist die Nullösung somit instabil.

Kommen wir nun zu System (ii): Wir schreiben $g(x,y) := (-xy, x^2 - y^3)^{\mathrm{T}}$ und erhalten

$$\dot{L}(x,y,z) = \langle \nabla L(x,y) | g(x,y) \rangle = -4Ax^2y + 2Byx^2 - 2By^4.$$

Wählen wir z.B. $B = 2A$ so erhalten wir $\dot{L}(x,y,z) = -2By^4 \leq 0$ für alle $(x,y) \neq 0$, d.h. L ist eine Ljapunov-Funktion, allerdings keine strikte Ljapunov-Funktion. Nach Kapitel IV, Theorem 2.2 ist die Nullösung somit stabil.

(G 4)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y''(t) + y(t) & = & 1, & t \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ y(0) & = & 0, & \\ y(\frac{\pi}{2}) & = & 0. & \end{array} \right. \tag{2}$$

(a) Überführen Sie dieses Randwertproblem in die äquivalente Form

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u'(t) & = & Fu(t) + g(t), & t \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ Au(0) + Bu(\frac{\pi}{2}) & = & 0. & \end{array} \right. \tag{3}$$

für geeignete $A, B, F \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und $g \in C([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{C}^2)$.

(b) Geben Sie die charakteristische Matrix für Problem (3) an. Ist diese invertierbar? Vergleichen Sie ihre Beobachtung mit Aufgabe G2.

(c) Bestimmen Sie die Greensche Funktion und geben Sie anschließend die Lösung von System (3) an.

LÖSUNG: (a) Wir setzen

$$u = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dieser Wahl ist Gleichung (2) äquivalent zu System (3).

(b) Ein reelles Lösungsfundamentalsystem für die homogene Gleichung ist durch

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

gegeben (vgl. z.B. Kapitel III, Bsp. 4.4). Die charakteristische Matrix ist somit durch

$$C = AZ(0) + BZ(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben und invertierbar. Das heißt, dass die homogene Gleichung nur die triviale Lösung $u \equiv 0$ besitzt. Dies entspricht der Beobachtung in G2 b).

(c) Die Greensche Funktion ist gegeben durch

$$G(t,s) = Z(t)C^{-1}AZ(0)Z(s)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t \cos s & -\cos t \sin s \\ -\sin t \cos s & \sin t \sin s \end{pmatrix} \quad 0 \le s \le t \le b,$$

$$G(t,s) = -Z(t)C^{-1}BZ(\frac{\pi}{2})Z(s)^{-1} = -\begin{pmatrix} \sin t \sin s & -\sin t \cos s \\ -\cos t \sin s & \cos t \cos s \end{pmatrix} \quad 0 \le t < s \le b.$$

Somit lässt sich die Lösung von (3) durch

$$u(t) = \int_0^{\pi/2} G(t,s)g(s)\,ds = \int_0^t G(t,s)g(s)\,ds + \int_t^{\pi/2} G(t,s)g(s)\,ds = \begin{pmatrix} 1 - \sin t - \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

angeben.