Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 20./21.1.2009

Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen

6. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Gegeben sei das System 1. Ordnung

$$\begin{cases} x'(t) &=& a(y(t)-x(t)), \\ y'(t) &=& bx(t)-y(t)-x(t)z(t), \\ z'(t) &=& x(t)y(t)-cz(t), \end{cases}$$

für $t \geq 0$, wobei $a, c > 0$ und $0 \leq b < 1$ Konstanten sind.

(a) Zeigen Sie, dass $(0,0,0)$ ein kritischer Punkt des Systems ist.

(b) Geben Sie die Linearisierung im kritischen Punkt $(0,0,0)$ an.

(c) Was lässt sich über das Stabilitätsverhalten der Nulllösung aussagen?

(d) Was lässt sich im Fall $b = 1$ mit Hilfe der linearisierten Stabilität über das Stabilitätsverhalten der Nulllösung aussagen?

LÖSUNG: Wir setzen $u = (x,y,z)^{\mathrm{T}}$ und $f(x,y,z) = (a(y-x), bx-y-xz, xy-cz)^{\mathrm{T}}$ und somit lässt sich das autonome System in der Form $u'(t) = f(u(t))$ schreiben.

(a) Es gilt $f(0,0,0) = (0,0,0)$ und somit ist $(0,0,0)$ ein kritischer Punkt des Systems.

(b) Es gilt
$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ b-z & -1 & -x \\ y & x & -c \end{pmatrix}.$$
Wie im Skript Kapitel IV setzen wir $g(u) = f(u) - Df(0,0,0)u$ und
$$A = Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}$$
und erhalten somit als Linearisierung im Punkt $(0,0,0)$ die Gleichung $u' = f(u) = Au + g(u)$.

(c) Das charakteristische Polynom von A ist $p(\lambda) = (-c-\lambda)(\lambda^2 + (a+1)\lambda + a - ab)$. Als Eigenwerte erhält man $\lambda_1 = -c$ und $\lambda_{2/3} = \frac{1}{2}\left(-a-1 \pm \sqrt{(a-1)^2 + 4ab}\right)$. Für $b < 1$ sind alle Eigenwerte reell und negativ. Aus dem Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3) folgt, dass der Punkt $(0,0,0)$ (d.h. die Nulllösung) asymptotisch stabil ist.

(d) Für $b = 1$ sind ebenfalls alle Eigenwerte reell, allerdings sind zwei Eigenwerte negativ und ein Eigenwert 0. Das Prinzip der linearisierten Stabilität macht in diesem Fall keine Aussage.

(G 2)

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die folgenden Differentialgleichungen:

(i) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0, \quad t \geq 0,$ (ii) $y'''(t) - 2y''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0, \quad t \geq 0.$

LÖSUNG: (i) Das charakteristische Polynom ist $A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Es hat $\lambda_1 = 2$ als Nullstelle mit Vielfachheit 2. Nach Kapitel III, Satz 5.3 bilden

$$\phi_1(t) = \mathrm{e}^{2t}, \qquad \phi_2(t) = t\,\mathrm{e}^{2t}$$

ein Fundamentalsystem.

(ii) Hier ist $A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$. Daher sind die Nullstellen von $A(\lambda)$ gegeben durch

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Somit ist

$$\phi_1(t) = \mathrm{e}^{t}, \qquad \phi_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \qquad \phi_3(t) = \mathrm{e}^{\lambda_3 t}$$

ein Fundamentalsystem. Um ein reelles Fundamentalsystem zu bestimmen, definiere

$$\begin{aligned}
\psi_1(t) &:= \phi_1(t) \\
\psi_2(t) &:= \frac{1}{2}(\phi_2(t) + \phi_3(t)) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t + i\frac{\sqrt{3}}{2}t} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t - i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\
\psi_3(t) &:= \frac{1}{2}(\phi_2(t) - \phi_3(t)) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.
\end{aligned}$$

Da $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und $\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$, ist auch ψ_1, ψ_2, ψ_3 ein Fundamentalsystem.

(G 3)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie:

(a) Aus der Stabiltät der Nulllösung des Systems $y'(t) = Ay(t)$ folgt im Allgemeinen nicht die Attraktivität der Nulllösung.

(b) Ist die Nulllösung des Systems $y'(t) = Ay(t)$ attraktiv, so ist sie stets auch stabil, damit also asymptotisch stabil.

Bemerkung: Im Allgmeinen folgt aus der Attraktivität einer Lösung nicht die Stabilität der Lösung.

LÖSUNG: (a) Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind $\pm i$. Das Phasenpotrait des Systems $y' = Ay$ ist ein Wirbel/Zentrum. Man erkennt sofort, dass die Nulllösung stabil, aber nicht attraktiv ist.

(b) Wir nehmen an, die Nulllösung ist attraktiv, d.h. nach der Definition (Kapitel III, Definition 4.6) existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle Lösungen $u(t) = e^{tA}x_0$ von

$$\begin{cases} x'(t) &= Ax(t), \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

mit $|x_0| < \delta$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \lim_{t\to\infty} |e^{tA}x_0| = 0.$$

Insbesondere können wir also $x_0 = \frac{\delta}{2} \cdot e_i$ setzen, wobei e_i den i-ten Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, und wir erhalten

$$\frac{\delta}{2} \lim_{t\to\infty} |e^{tA}(e_i)| = 0,$$

d.h. die Norm der n-Spalten von e^{tA} konvergieren alle gegen 0 für $t \to \infty$. Also folgt insbesondere, $\lim_{t\to\infty} \|e^{tA}\| = 0$, d.h. die Matrixnorm von e^{tA} geht gegen 0 für $t \to \infty$. Diese Beobachtung zusammen mit der Stetigkeit von $t \mapsto e^{tA}$ garantieren nun die Existenz einer Konstante M, so dass $\|e^{tA}\| \leq M$ für alle $t \geq 0$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Um die Stabilität der Nulllösung zu beweisen, muss gezeigt werden, dass ein $\tilde{\delta} > 0$ existiert, so dass für alle Lösungen $z(t) = e^{tA}w_0$ von

$$\begin{cases} w'(t) &= Aw(t), \\ w(0) &= w_0, \end{cases}$$

mit $|w_0| < \tilde{\delta}$ gilt:

$$|z(t)| = |e^{tA}w_0| \leq \varepsilon \qquad t > 0.$$

Setzen wir nun $\tilde{\delta} = \frac{\varepsilon}{M}$, dann erhalten wir

$$|e^{tA}w_0| \leq \|e^{tA}\||w_0| \leq M|w_0| \leq \varepsilon$$

für alle $|w_0| < \tilde{\delta}$ und somit haben wir die Stabilität der Nulllösung gezeigt.

Hausübungen

(H 1)

Wir betrachten die folgenden beiden Systeme nichtlinearer Differentialgleichungen

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} x'(t) &= -y(t) + x^3(t), \\ y'(t) &= x(t) + y^3(t), \end{cases} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{cases} x'(t) &= -y(t) - x^3(t), \\ y'(t) &= x(t) - y^3(t), \end{cases}$$

für $t \geq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass beide Systeme $(0, 0)$ als einzigen kritischen Punkt haben.

(b) Zeigen Sie, dass eine Linearisierung im kritischen Punkt $(0, 0)$ jeweils auf das lineare System

$$\text{(iii)} \quad \begin{cases} x'(t) &= -y(t), \\ y'(t) &= x(t), \end{cases}$$

führt.

(c) Geben Sie das Phasenpotrait für System (iii) an? Was lässt sich über das Stabilitätsverhalten der Nulllösung von System (iii) aussagen?

(d) Was lässt sich über das Stabilitätsverhalten der Nulllösungen der Systeme (i) und (ii) aussagen? Betrachten Sie dazu, die Funktion $r(t) := \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$, die den Abstand des Punktes $(x(t), y(t))$ zum Nullpunkt misst. Steht das Stabilitätsverhalten der Nulllösungen im Widerspruch zum Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3)?

Lösung: Mit $z(t) = (x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ und $f(x, y) = (-y+x^3, x+y^3)^{\mathrm{T}}$ bzw. $h(x, y) = (-y-x^3, x-y^3)^{\mathrm{T}}$ lassen sich die beiden Systeme (i) und (ii) in der Form $z'(t) = f(z(t))$ bzw. $z'(t) = h(z(t))$ schreiben.

(a) Die kritischen Punkte von f bzw. h sind alle (x, y) mit $f(x, y) = 0$ bzw. $h(x, y) = 0$. Man sieht recht leicht, dass in beiden Fällen $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt ist.

(b) Es gilt

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -1 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Dh(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & -1 \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}.$$

Insbsondere ist also

$$A := Df(0,0) = Dh(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie im Skript Kapitel IV beschrieben, sind die Systeme (i) und (ii) Störungen des linearen Systems (iii) gegeben dur $z'(t) = Az(t)$.

(c) Die Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \pm i$. Somit ist das Phasenpotrait ein Wirbel/Zentrum (vgl. Vorlesung). Die Nulllösung ist stabil (vgl. Kapitel III, Bemerkung 4.7 und Satz 4.8).

(d) Wir betrachten die Funktion $r(t) := \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$, die den Abstand des Punktes $(x(t), y(t))$ zum Nullpunkt misst. Für System (i) gilt dann

$$r'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} = \frac{x^4(t) + y^4(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} > 0$$

für $(x(t), y(t)) \neq (0,0)$. Dies bedeutet, dass mit zunehmender Zeit der Abstand von $(x(t), y(t))$ zum Nullpunkt stets größer wird. Also laufen die Orbits von $(0,0)$ weg, d.h. die Nulllösung ist instabil. Für System (ii) gilt

$$r'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} = \frac{-(x^4(t)) + y^4(t))}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} < 0$$

für $(x(t), y(t)) \neq (0,0)$. Also laufen die Orbits in $(0,0)$ hinein, d.h. die Nulllösung ist asymptotisch stabil.

Obwohl beide Systeme (i) und (ii) die selbe Linearisierung im Punkt $(0,0)$ besitzen, zeigen die Nulllösungen ein unterschiedliches Stabilitätsverhalten. Dies ist kein Widerspruch zum Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3), da dieses Theorem keine Aussage für die Eigenwerte $\pm i$ trifft.

(H 2)

Betrachten Sie das System

$$\begin{cases} x'(t) &= 2(x(t) + y(t) - x(t)y(t) - x^2(t)), \\ y'(t) &= -2z(t) - y(t) - x(t)y(t), \\ z'(t) &= x(t) - z(t), \end{cases}$$

für $t \geq 0$ und bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten der Nulllösung.

Lösung: Wir schreiben $u = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$ und

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(x(t) + y(t) - x(t)y(t) - x^2(t)) \\ -2z(t) - y(t) - x(t)y(t) \\ x(t) - z(t) \end{pmatrix}.$$

Da $f(0,0,0) = (0,0,0)$ gilt, ist $(0,0,0)$ ein kritischer Punkt des Systems $u' = f(u)$. Es gilt

$$Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

und das zugehörige charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)(1 + \lambda)^2 - 4 = -(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Daraus kann man ablesen, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert von $Df(0,0,0)$ ist und somit folgt aus dem Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3), dass die Nulllösung instabil ist.

(H 3) (Mathematisches Pendel mit Reibung)

Im Skript, Kapitel IV wird die Gleichung des mathematischen Pendels ohne Reibung diskutiert. Die Gleichung des mathematischen Pendels mit Reibung lautet

$$u''(t) + \varepsilon u'(t) + \sin u(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

wobei $\varepsilon > 0$ gilt.

(a) Überführen Sie diese Gleichung in das zugehörige System 1. Ordnung $v'(t) = f(v(t))$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte des Systems $v'(t) = f(v(t))$.

(c) Bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten der kritischen Punkte.

LÖSUNG: (a) Wir setzen $v = (u, u')^{\mathrm{T}}$ und $f(x, y) = (y, -\varepsilon y - \sin x)^{\mathrm{T}}$. Das zugehörige System 1. Ordnung lautet nun

$$v'(t) = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u' \\ -\varepsilon u' - \sin u \end{pmatrix} = f(v).$$

(b) Die kritischen Punkte von f, d.h. die Punkte (x, y) mit $f(x, y) = 0$, sind $(k\pi, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Es gilt

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -\varepsilon \end{pmatrix},$$

sowie

$$Df(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon \end{pmatrix} \text{für } k \text{ gerade,} \quad \text{und} \quad Df(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix} \text{für } k \text{ ungerade.}$$

Wir bestimmen zunächst das Stabiltätsverhalten der kritischen Punkte $(k\pi, 0)$ für k gerade: Das charakteristische Polynom von $Df(k\pi, 0)$ ist durch $p_1(\lambda) = \lambda^2 + \varepsilon\lambda + 1$ gegeben. Als Eigenwerte erhält man

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - 4}{4}}.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.
Fall 1: $\varepsilon < 2$.
In diesem Fall ist $\varepsilon^2 - 4 < 0$, d.h. $\sqrt{\frac{\varepsilon^2-4}{4}} \in i\mathbb{R}$. Also gilt $\mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = -\frac{\varepsilon}{2} < 0$. Nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3) sind die kritischen Punkte $(k\pi, 0)$ für k gerade asymptotisch stabil.
Fall 2: $\varepsilon \geq 2$.
In diesem Fall ist $\sqrt{\frac{\varepsilon^2-4}{4}} \in \mathbb{R}$ und es gilt $\sqrt{\frac{\varepsilon^2-4}{4}} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{2}$. Die beiden Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ sind reell und negativ. Nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3) sind die kritischen Punkte $(k\pi, 0)$ für k gerade asymptotisch stabil.

Nun bestimmen wir das Stabiltätsverhalten der kritischen Punkte $(k\pi, 0)$ für k ungerade: Das charakteristische Polynom von $Df(k\pi, 0)$ ist durch $p_2(\lambda) = \lambda^2 + \varepsilon\lambda - 1$ gegeben. Als Eigenwerte erhält man

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2 + 4}{4}}.$$

Es gilt $\sqrt{\frac{\varepsilon^2+4}{4}} > \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{2}$. Somit liegt jewils ein positiver und ein negativer Eigenwert vor. Nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3) sind die Punkte $(k\pi, 0)$ für k ungerade instabil.