



Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen

4. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Reduktionsverfahren von d'Alembert)

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$$

eine stetige Abbildung. Die Differentialgleichung $y'(t) = A(t)y(t)$ besitze die spezielle Lösung $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Im Teilintervall $J \subseteq I$ gelte $\phi_1(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Zeigen Sie: Man erhält eine zweite Lösung $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch den Ansatz

$$\psi(t) = u(t) \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix},$$

wobei $u, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, die den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$g' = \left(a_{22} - a_{12} \frac{\phi_2}{\phi_1} \right) g, \quad u' = \frac{a_{12}}{\phi_1} g.$$

(b) Nun betrachten wir für $t > 0$ das folgende homogene Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} y_1' = \frac{1}{t} y_1 - y_2 \\ y_2' = \frac{1}{t^2} y_1 + \frac{2}{t} y_2 \end{cases}$$

Schreiben Sie dieses System in Matrix-Form und geben Sie ein Fundamentalsystem an. Verwenden Sie dabei die Methode aus Teil (a).

LÖSUNG: (a) Es gilt auf dem Intervall J :

$$\begin{aligned} \psi' &= \begin{pmatrix} u\phi_1 \\ u\phi_2 + g \end{pmatrix}' \\ &= \begin{pmatrix} u'\phi_1 + u\phi_1' \\ u'\phi_2 + u\phi_2' + g' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_{12}}{\phi_1} g\phi_1 + u(a_{11}\phi_1 + a_{12}\phi_2) \\ \frac{a_{12}g}{\phi_2} + u(a_{21}\phi_1 + a_{22}\phi_2) + (a_{22} - a_{12}\frac{\phi_2}{\phi_1})g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}u\phi_1 + a_{12}(u\phi_2 + g) \\ a_{21}u\phi_1 + a_{22}(u\phi_2 + g) \end{pmatrix} \\ &= A\psi. \end{aligned}$$

(b) Mit $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ kann man das System in die Form $y'(t) = A(t)y(t)$ bringen, wobei

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}$$

ist. Durch "scharfes" Hinsehen bekommt man als erste Lösung z.B. $\phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$ (Probe machen!).

Die beiden Differentialgleichungen aus Teil (a) lauten angewendet auf diesen Fall:

$$g' = \left(\frac{2}{t} - 1\frac{t}{t^2}\right)g = \frac{1}{t}g \quad \text{und} \quad u' = -\frac{1}{t^2}g.$$

Also ist zum Beispiel $g = t$ eine Lösung von $g' = \frac{1}{t}g$. Die zweite Differentialgleichung $u' = \frac{1}{t}$ wird durch $u(t) := \ln t$ gelöst. Jetzt kann die Formel aus der (a) benutzt werden, und man erhält eine zweite Lösung ψ für $y'(t) = A(t)y(t)$:

$$\psi(t) := u(t) \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \ln t \\ t \ln t + t \end{pmatrix}.$$

Die Wronski-Matrix ist gegeben durch

$$Z(t) = \begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln t \\ -t & t + t \ln t \end{pmatrix}.$$

Da $\det Z(1) = 1 \neq 0$ gilt, ist Z sogar eine Fundamentalmatrix und $\{\phi, \psi\}$ ein Fundamentalsystem.

(G 2) (Wronski-Determinante / Fundamentalsystem)

(a) Es sei $A : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ stetig mit $\text{spur } A(t) \leq -\frac{1}{t+1}$ für $t \in [0, \infty)$, und sei Z ein Fundamentalsystem von $y'(t) = A(t)y(t)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \det Z(t) = 0$$

gilt.

(b) Es sei $A : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ stetig und X bzw. Y seien Fundamentalsysteme von $x'(t) = A(t)x(t)$ bzw. $y'(t) = -A^T(t)y(t)$ mit $X(0) = Y(0) = Id$. Zeigen Sie, dass dann

$$X(t) = (Y^T(t))^{-1}, \quad t \in [0, T],$$

gilt.

LÖSUNG: (a) Nach dem Satz von Liouville (Kapitel III, Satz 1.6) gilt

$$\begin{aligned} \det Z(t) &= \det Z(0) \exp\left(\int_0^t \text{spur } A(s) ds\right) \leq \det Z(0) \exp\left(\int_0^t -\frac{1}{s+1} ds\right) \\ &\leq \det Z(0) \exp(-\ln(t+1)) \leq \det Z(0) \frac{1}{t+1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\det Z(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

(b) Da Y ein Fundamentalsystem ist, gilt nach Kapitel III, Bemerkung 1.5, dass $Y'(t) = -A^T(t)Y(t)$ ist. Somit erhalten wir

$$[(Y^T(t))^{-1}]' = -(Y^T(t))^{-1}(Y^T(t))'(Y^T(t))^{-1} = (Y^T(t))^{-1}(A^T(t)Y(t))^T(Y^T(t))^{-1} = A(t)(Y^T(t))^{-1}.$$

Somit ist $(Y^T(t))^{-1}$ eine Lösung der Gleichung $Z'(t) = A(t)Z(t)$. Da aber X ein Fundamentalsystem für das System $x'(t) = A(t)x(t)$ ist, folgt dass X ebenfalls eine Lösung dieser Gleichung ist (vgl. Kapitel III, Bemerkung 1.5). Da $X(0) = Y(0) = (Y^T(0))^{-1} = Id$, folgt auf Grund der Eindeutigkeit (beachte hier, dass man die Differentialgleichung $Z'(t) = A(t)Z(t)$ komponentenweise auffasst), dass $X(t) = (Y^T(t))^{-1}$ gilt.

(G 3)

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{C}^2$ und $\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{C}^2$ zwei differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$[\det(\phi(t), \psi(t))]' = \det(\phi'(t), \psi(t)) + \det(\phi(t), \psi'(t))$$

gilt.

LÖSUNG: Wir berechnen:

$$\begin{aligned} [\det(\phi(t), \psi(t))]' &= [\phi_1(t)\psi_2(t) - \psi_1(t)\phi_2(t)]' = \phi_1'(t)\psi_2(t) + \phi_1(t)\psi_2'(t) - \psi_1'(t)\phi_2(t) - \psi_1(t)\phi_2'(t) \\ &= \phi_1'(t)\psi_2(t) - \psi_1(t)\phi_2'(t) + \phi_1(t)\psi_2'(t) - \psi_1'(t)\phi_2(t) \\ &= \det(\phi'(t), \psi(t)) + \det(\phi(t), \psi'(t)). \end{aligned}$$

Hausübungen

(H 1) (Homogene lineare Differentialgleichung)

Wir betrachten für $t > 0$ das folgende homogene Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + \frac{1}{t}y_2 \\ y_2' = (1-t)y_1 + y_2 \end{cases}$$

Stellen Sie dieses System in Matrix-Form da und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem.

LÖSUNG: Mit $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ kann man das System in die Form $y'(t) = A(t)y(t)$ bringen, wobei

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{t} \\ 1-t & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Als erste Lösung kann man $\phi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ raten. Setzt man ϕ in die Differentialgleichung ein, erhält man

$$A(t)\phi(t) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{t} \\ 1-t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \phi'(t).$$

und somit ist ϕ tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung.

Die beiden Differentialgleichungen aus H1 (a) lauten angewendet auf diesen Fall:

$$g' = (1 - \frac{1}{t})g = 0 \quad \text{und} \quad u' = \frac{1}{t}g.$$

Also ist zum Beispiel $g \equiv 1$ Lösung von $g' = 0$. Die zweite Differentialgleichung $u' = \frac{1}{t}$ wird durch $u(t) := \ln t$ gelöst. Jetzt kann die Formel aus der H1 (a) benutzt werden, und man erhält eine zweite Lösung ψ für $y'(t) = A(t)y(t)$:

$$\psi(t) := u(t) \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln t \\ t \ln t + 1 \end{pmatrix}.$$

Die Wronski-Matrix ist gegeben durch

$$Z(t) = \begin{pmatrix} 1 & \ln t \\ t & t + \ln t + 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\det Z(1) = 21 \neq 0$ gilt, ist Z sogar eine Fundamentalmatrix und $\{\phi, \psi\}$ ein Fundamentalsystem.

(H 2) (Inhomogene lineare Differentialgleichung)

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden inhomogenen Differentialgleichungssystems auf $[1, \infty[$.

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + \frac{1}{t}y_2 + \ln t + \frac{1}{t} \\ y_2' = (1-t)y_1 + y_2 + (t-1)\ln t \end{cases}$$

LÖSUNG: Wir wissen aus der H1, dass

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ t \ln t + 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem für das homogene System bilden. Um eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems zu bestimmen, rechnet man

$$\begin{aligned} \int_1^t (\phi(s)\psi(s))^{-1} \begin{pmatrix} \ln s + \frac{1}{s} \\ (s-1)\ln s \end{pmatrix} ds &= \int_1^t \begin{pmatrix} 1 & \ln s \\ s & s \ln s + 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ln s + \frac{1}{s} \\ (s-1)\ln s \end{pmatrix} ds \\ &= \int_1^t \frac{1}{s \ln s + 1 - s \ln s} \begin{pmatrix} s \ln s + 1 & -\ln s \\ -s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln s + \frac{1}{s} \\ (s-1)\ln s \end{pmatrix} ds \\ &= \int_1^t \begin{pmatrix} (s \ln s + 1)(\ln s + \frac{1}{s}) - (s-1)(\ln s)^2 \\ -s(\ln s + \frac{1}{s}) + (s-1)\ln s \end{pmatrix} ds \\ &= \int_1^t \begin{pmatrix} 2 \ln s + s(\ln s)^2 + \frac{1}{s} - (s-1)(\ln s)^2 \\ -s \ln s - 1 + s \ln s - \ln s \end{pmatrix} ds \\ &= \int_1^t \begin{pmatrix} 2 \ln s + (\ln s)^2 + \frac{1}{s} \\ -1 - \ln s \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \ln s + s(\ln s)^2 \\ -s \ln s \end{pmatrix} \Big|_{s=1}^{s=t} \\ &= \begin{pmatrix} \ln t + t(\ln t)^2 \\ -t \ln t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$(\phi(t), \psi(t)) \begin{pmatrix} \ln t + t(\ln t)^2 \\ -t \ln t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln t \\ t & t \ln t + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln t + t(\ln t)^2 \\ -t \ln t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln t \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist. Daher ist die Gesamtheit aller Lösungen gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} \ln t \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \phi(t) + \mu \psi(t) : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

(H 3) (Matrix-Exponential-Funktion)

Es seien A, B zwei $n \times n$ Matrizen über \mathbb{C} . In der Vorlesung wurde die Matrix-Exponential-Funktion $e^{tA} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ definiert. Insbesondere gilt also $e^{0A} := Id$. Beweisen Sie nun die folgenden Aussagen:

- Es gilt $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ falls $AB = BA$ gilt.
- $e^{(s+t)A} = e^{sA} \cdot e^{tA}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$,
- $\frac{d}{dt} (e^{tA}) = A e^{tA}$.

- (d) $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
 (e) $e^{t \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
 (f) $e^{tA + \lambda Id} = e^\lambda e^{tA}$ für $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.
 (g) Aus $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, folgt $AB = BA$.

LÖSUNG: (a) Gilt $AB = BA$, so ist

$$(A + B)^j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} A^k B^{j-k},$$

und mit dem Cauchy-Produkt erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{t(A+B)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A+B)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} A^k B^{j-k} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{t^k A^k}{k!} \frac{t^{j-k} B^{j-k}}{(j-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m B^m}{m!} = e^{tA} e^{tB}. \end{aligned}$$

- (b) Diese Aussage folgt direkt aus (a).
 (c) Um diese Aussage zu beweisen beachten wir, dass aus (b) für alle $t, h \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA} - Id}{h} \cdot e^{tA}$$

folgt. Es bleibt also nur noch $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - Id}{h} = A$ zu zeigen. Dies folgt allerdings aus

$$\left\| \frac{e^{hA} - Id}{h} - A \right\| \leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{|h|^{j-1} \cdot \|A\|^j}{j!} = \frac{e^{|h| \cdot \|A\|} - 1}{h} - \|A\| \rightarrow 0$$

für $h \rightarrow 0$ (beachte, dass wir hier eine bekannte Eigenschaft der reelwertigen Exponentialfunktion ausgenutzt haben).

- (d) Nach (a) ist $e^A e^{-A} = I$. Also ist e^A invertierbar und $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
 (e) Aus LA ist bekannt (oder man zeigt es induktiv), dass $(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^j = \text{diag}(\lambda_1^j, \dots, \lambda_n^j)$. Daraus folgt nun die Aussage.
 (f) Beachte, dass die Matrizen tA und λId kommutieren. Also folgt aus (a) und (e)

$$e^{tA + \lambda Id} = e^{\lambda Id} e^{tA} = \text{diag}(e^\lambda, \dots, e^\lambda) e^{tA} = e^\lambda e^{tA}.$$

- (g) Es sei $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir leiten zweimal an der Stelle $t = 0$ ab und erhalten

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} e^{t(A+B)} \right|_{t=0} = (A+B)^2,$$

und

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} (e^{tA} e^{tB}) \right|_{t=0} = A^2 + 2AB + B^2.$$

Somit folgt $AB = BA$.