**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 18./19.11.2008

# Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 3. Übung mit Lösungshinweisen

### Gruppenübungen

**(G 1) (Gleichgradige Stetigkeit)**

(a) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $M > 0$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{F}_1 = \{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) : |f'(x)| \leq M \text{ für alle } x \in [a, b]\}$$

gleichgradig stetig ist.

(b) Welche der folgenden Teilmengen von $C([0, 1], \mathbb{R})$ sind gleichgradig stetig? Welche sind relativ kompakt?

$$\mathcal{F}_2 = \{f : f(x) = x^\alpha, 1 \leq \alpha < 2\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \{f : f(x) = x^\alpha, 0 < \alpha < \infty\}$$

$$\mathcal{F}_4 = \{f : f(x) = n \cos\left(\frac{1}{n}x\right), n \in \mathbb{N}\}$$

LÖSUNG: (a) Da für jedes $f \in \mathcal{F}_1$ die Ableitung durch $M > 0$ beschränkt ist, folgt aus dem Mittelwertsatz, dass $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$, d.h. jedes $f \in \mathcal{F}_1$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = M$. Für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$ können wir also $\delta = \varepsilon/L$ wählen und erhalten $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $|x - y| < \delta$ und alle $f \in \mathcal{F}_1$. Somit ist $\mathcal{F}_1$ gleichgradig stetig.

(b)

1. Für jedes $f \in \mathcal{F}_2$ gilt $|f(t)| = |t^\alpha| \leq 1$ für $t \in [0, 1]$ und $1 \leq \alpha < 2$. Somit ist $\mathcal{F}_2$ gleichmäßig beschränkt. Außerdem gilt für jedes $f \in \mathcal{F}_2$, dass $|f'(t)| = |\alpha t^{\alpha-1}| \leq 2$ für $t \in [0, 1]$ und $1 \leq \alpha < 2$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist jedes $f \in \mathcal{F}_2$ Lipschitz-stetig auf $[0, 1]$ mit Lipschitzkonstante $L = 2$. Somit ist $\mathcal{F}_2$ gleichgradig stetig. Nach Arzelà-Ascoli ist $\mathcal{F}_2$ relativ kompakt.
2. Betrachte die Funktionenfolge $(f_n)_n \subset \mathcal{F}_3$ definiert durch $f_n(t) = t^n$. Jede Teilfogle von $(f_n)_n$ konvergiert punktweise gegen die unstetige Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \in [0, 1), \\ 1, & \text{falls } t = 1. \end{cases}$$

Somit besitzt $(f_n)_n$ keine gleichmäßig konvergente Teilfolge, d.h. $\mathcal{F}_3$ ist nicht relativ kompakt. Da $\mathcal{F}_3$ gleichmäßig beschränkt ist (zeigt man analog zu 1.), folgt aus Arzelà-Ascoli, dass $\mathcal{F}_3$ nicht gleichgradig stetig ist.

3. Für jedes $f \in \mathcal{F}_4$ gilt $|f'(t)| = |-\sin\left(\frac{1}{n}t\right)| \leq 1$ für $t \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist jedes $f \in \mathcal{F}_4$ Lipschitz-stetig auf $[0,1]$ mit Lipschitzkonstante $L = 1$. Somit ist $\mathcal{F}_4$ gleichgradig stetig. Allerdings ist $\mathcal{F}_4$ nicht gleichmäßig beschränkt, da $f_n(0) := n\cos\left(\frac{1}{n}0\right) \to \infty$ für $n \to \infty$. Somit ist $\mathcal{F}_4$ nicht relativ kompakt.

**(G 2)**

Es sei $D = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 < 1\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t,y) = \sin\left(\frac{1}{1-(t^2+y^2)}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y' = f(t,y), y(0) = 0$ eindeutig lösbar ist.

(b) Es sei $u : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems aus Teil (a). Zeigen Sie:

1. $-t_- = t_+$;
2. $\lim_{t \nearrow t_+} u(t)$ existiert;
3. $\lim_{t \nearrow t_+} t^2 + u^2(t) = 1$.

LÖSUNG: (a) Die Funtion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig und

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \cos\left(\frac{1}{1-(t^2+y^2)}\right) \frac{1}{(1-(t^2+y^2))^2}.$$

Für $0 < \lambda < 1$ definieren wir $D_\lambda := \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 \leq \lambda\}$. Für alle $(t,y) \in D_\lambda$ gilt nun

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right| \leq \frac{1}{(1-\lambda)^2}.$$

Nach dem Mittelwertsatz genügt $f$ auf $D_\lambda$ einer Lipschitzbedingung. Da für jeden Punkt $(t,y) \in D$ ein $0 < \lambda < 1$ existiert mit $(t,y) \in D_\lambda$, folgt dass $f$ einer lokalen Lipschitzbedingung auf $D$ genügt. Der lokale Satz von Picard Lindelöf garantiert nun die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(t,y), y(0) = 0$ auf einer Umgebung $U$ von $(0,0)$.

(b)

1. Es sei $u : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems aus Teil (a). Es ist klar, dass $-1 \leq t_- < 0 < t_+ \leq 1$ gilt. Wir nehmen nun an, dass: $-t_+ < t_-$ (der Fall $-t_+ > t_-$ geht analog).
   Für $t \in (-t_+, -t_-)$ ist $z(t) := -u(-t)$ eine Lösung des AWP aus Teil (a), da $f$ eine gerade Funktion ist. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung muss $z(t) = u(t)$ für alle $t \in (t_-, -t_-)$ gelten. Nun ist aber die Funtktion $\tilde{u} : (-t_+, t_+) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} -u(-t), & t \in (-t_+, t_-], \\ u(t), & t \in (t_-, t_+) \end{cases}$$

   ebenfalls eine Lösung des AWP, die $u$ nach links fortsetzt. Dies widerspricht der Maximalität von $u$. Also muss $-t_+ = t_-$ gelten.
2. Da $|f(t,y)| \leq 1$ für alle $(t,y) \in D$, folgt aus dem Mittelwertsatz, dass $u : (-t_+, t_+) \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und somit insbesondere gleichmäßig stetig ist. Also existiert $\alpha := \lim_{t \nearrow t_+} u(t)$.

3. Beachte, dass $\lim_{t \nearrow t_+} t^2 + u^2(t) = t_+^2 + \alpha^2$. Wir nehmen an, dass $t_+^2 + \alpha^2 < 1$, d.h. der Punkt $(t_+, \alpha)$ liegt im Inneren von $\overline{D}$. Dann exisitiert eine Lösung $v : [t_+, t_+ + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems $y' = f(t, y),\ y(t_+) = \alpha$. Nun ist aber

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in (-t_+, t_+], \\ v(t), & t \in [t_+, t_+ + \varepsilon) \end{cases}$$

eine Fortsetzung der Lösung $u$ nach rechts, was aber ein Widerspruch zur Maximalität ist. Somit ist $t_+^2 + \alpha^2 = 1$, d.h $(t_+, \alpha) \in \partial D$.

### (G 3) (Modellierung)

Durch das Land Sisylana (die $x$-$y$-Ebene) fließt ein Fluß, dessen Ufer durch $x = 0$ und $x = 1$ gegeben sind. Er fließt mit konstanter Geschwindigkeit $v_0$ in positive $y$-Richtung. Ein Hund springt im Punkt $(1, 0)$ in den Fluß und versucht, sein Herrchen zu erreichen, das in $(0, 0)$ auf ihn wartet. Der Hund schwimmt mit konstanter Geschwindigkeit $v_1$ und richtet sich immer genau auf sein Herrchen, während er abgetrieben wird. Bestimmen Sie die Kurve $y = \varphi(x)$, die der Hund zurücklegt. Wird er das Ufer $x = 0$ erreichen? Wo?
Hinweis: $\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dx = arcsinh\ z$ und $\sinh x = 1/2(e^x - e^{-x})$.

LÖSUNG: Es ist

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{v_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

das heißt

$$x' = -\frac{v_1 x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ y' = v_0 - \frac{v_1 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{y'}{x'} = -\frac{v_0}{v_1} \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2} + \frac{y}{x}.$$

Diese Gleichung hat die Form $y' = f(\frac{y}{x})$. Wir setzen $u := y/x$ und wir haben nun die Gleichung

$$u' = \frac{1}{x}(-\alpha\sqrt{1 + u^2}) \text{ mit } \alpha = \frac{v_0}{v_1}$$

zu lösen (vgl. Kapitel I, Beispiel 2.3). Trennung der Variablen ergibt

$$-\frac{1}{\alpha}\ (arcsinh\ u(x) -\ arcsinh\ u(1)) = -\frac{1}{\alpha} \int_{u(1)}^{u(x)} \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} dz = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x)$$

also ergibt sich mit der Anfangsbedingung $u(1) = 0$

$$u(x) = sinh(-\alpha \ln x) = \frac{1}{2}(x^{-\alpha} - x^{\alpha}).$$

Somit folgt $y(x) = \frac{1}{2}(x^{1-\alpha} - x^{1+\alpha})$. Ist $\alpha > 1$, so folgt $\lim_{x\to 0} y(x) = \infty$, das heißt der Hund treibt ab. Ist $\alpha = 1$, so gilt $\lim_{x\to 0} y(x) = \frac{1}{2}$, das heißt der Hund erreicht vielleicht das Ufer, aber nicht bei seinem Herrchen. Ist $\alpha < 1$, so gilt $\lim_{x\to 0} y(x) = 0$, das heißt der Hund erreicht sein Herrchen.

## Hausübungen

### (H 1) (Flüsse)

Sei $I = [0, \tau] \subset \mathbb{R}$ und $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine stetige Funktion, die einer globalen Lipschitzbedingung genügt. Zeigen Sie, dass es einen stetigen Fluss $v : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung $t \mapsto v(t, x)$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(y(t)),\ y(0) = x$ ist.

LÖSUNG: Nach dem globalen Satz von Picard Lindelöf exisitiert für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung $u_x : I \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems $y'(t) = f(y(t)),\ y(0) = x$. Somit können wir den Fluss $v : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $v(t,x) := u_x(t)$ definieren. Bleibt noch die Stetigkeit von $v$ zu zeigen. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Beachte, dass für festes $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $t \mapsto v(t,x)$ als Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(y(t)),\ y(0) = x$ insbesondere stetig ist. Das heißt es exisitiert ein $\delta > 0$, so dass $\|v(t,x) - v(s,x)\| \le \varepsilon/2$ für alle $|t-s| \le \delta$. Aus Kapitel II, Satz 1.12 (Abhängigkeit von den Daten) folgt, dass für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und festes $s \in I$ die Abschätzung

$$\sup_{s\in[0,\tau]} \|v(s,x) - v(s,y)\| \le \frac{e^{(L+1)\tau}}{1-c}\|x-y\|$$

gilt. Wählen wir also

$$\|x-y\| \le \frac{1-c}{e^{(L+1)\tau}} \cdot \frac{\varepsilon}{2}, \text{ und } |t-s| \le \delta$$

so erhalten wir

$$\|v(t,x) - v(s,y)\| \le \|v(t,x) - v(s,x)\| + \|v(s,x) - v(s,y)\| \le \varepsilon.$$

## (H 2)

Sei $I \subset [0,1]$ ein hinreichend kleines Intervall. Zeigen Sie: Es gibt eine differenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}$ mit $u(0) = 0$ und

$$u'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^k \cos(2^k u(t)), \qquad t \in I.$$

Zeigen Sie, dass für jede solche Funktion

$$|u(t)| \le 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{2-t}\right), \qquad t \in I,$$

gilt.

LÖSUNG: Beachte, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^k \cos(2^k y)$$

für alle $(t,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ konvergiert. Wir definieren $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^k \cos(2^k y)$$

und $f_n : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(t,y) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{t}{2}\right)^k \cos(2^k y).$$

Die Funktionen $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, sind stetig auf $[0,1] \times \mathbb{R}$. Wir berechnen

$$|f(t,y) - f_n(t,y)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^k \cos(2^k y)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2}^k.$$

Somit konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig auf $[0,1] \times \mathbb{R}$ gegen $f$. Daher ist $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und der Satz von Peano garantiert auf einer hinreichend kleinen Umgebung $U$ von $(0,0)$ die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^k \cos(2^k y(t)), \quad y(0) = 0.$$

Nun sei $u : I \to \mathbb{R}$ die Lösung dieses Anfangswertproblems. Es gilt

$$|u'(t)| = |f(t, u(t))| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^k = \frac{2}{2-t}.$$

Somit erhalten wir

$$|u(t)| = |\int_0^t u'(s)\, ds| \leq \int_0^t \frac{2}{2-s}\, ds = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{2-t}\right)$$

für alle $t \in I$.

## (H 3) (Maximale Lösung)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine stetige Abbildung, die lokal einer Lipschitzbedingung genügt. Zeigen Sie: Für eine maximale Lösung

$$u : (t_-, t_+) \to \mathbb{R}, \quad \text{von} \quad y' = f(t, y)$$

gilt $t_+ = \infty$ oder $\lim_{t \to t_+} |u(t)| = +\infty$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitzbedingung genügt und sei $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$y'(t) = f(y),\ y(t_0) = y_0 \text{ hat eine Lösung auf } [t_0, \infty) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{f(\xi)}\, d\xi = \infty.$$

*Bemerkung*: Die Aussage in Teil (a) gilt auch für Funktionen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Vergleichen Sie die Aussage in Teil (a) mit (G2) (b).

LÖSUNG: (a) Sei $t_+ < \infty$. Annahme: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $u'(t)$ beschränkt ist auf $[t_+ - \varepsilon, t_+)$. Dann ist $u$ nach dem Mittelwertsatz Lipschitz-stetig, also insbesondere gleichmäßig stetig auf $[t_+ - \varepsilon, t_+)$. Wir können also $u$ stetig nach $t_+$ fortsetzen. Hieraus folgt

$$u'(t) = f(t, u(t)) \xrightarrow{t \to t_+} f(t_+, u(t_+)).$$

Somit ist $u$ auch in $t_+$ differenzierbar mit $u'(t_+) = f(t_+, u(t_+))$. Nach dem lokalen Existenzsatz von Picard Lindelöf (Kapitel II, Theorem 1.8) gibt es ein $\delta > 0$ und ein $w : (t_+ - \delta, t_+ + \delta) \to \mathbb{R}^n$ mit $w' = f(t, w)$ und $w(t_+) = u(t_+)$. Nach dem Eindeutigkeitssatz (Kapitel II, Satz 1.6) stimmt diese Lösung auf $(t_+ - \delta, t_+]$ mit $u$ überein. Es folgt, dass

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{für } t \in (t_-, t_+) \\ w(t) & \text{für } t \in [t_+, t_+ + \delta) \end{cases}$$

eine Lösung der DGL ist, die $u$ fortsetzt. Widerspruch zur Maximalität von $u$. Somit ist $u'(t)$ unbeschränkt auf $[t_+ - \varepsilon, t_+)$. Nach der Voraussetzung an $f$ ist $u$ streng monoton wachsend, und somit folgt aus der Unbeschränkheit von $u'$, dass $\lim_{t \to t_+} |u(t)| = +\infty$.

(b) "$\Rightarrow$" Sei $u$ eine Lösung von $y' = f(y)$, $y(t_0) = y_0$ auf $[t_0, \infty)$. Wegen $u' = f(u)$ ist $u$ streng monoton wachsend. Es gilt

$$\infty \xleftarrow{t \to \infty} \int_{t_0}^t 1 ds = \int_{t_0}^t \frac{u'(s)}{f(u(s))} ds = \int_{y_0}^{u(t)} \frac{1}{f(\tau)} d\tau \leq \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{f(\tau)} d\tau.$$

"$\Leftarrow$" Da $f$ Lipschitz-stetig ist, existiert genau eine maximale Lösung $u$ von $y' = f(y)$ mit $y(t_0) = y_0$ (Kapitel II, Satz 1.10). Ausserdem erfüllt $f$ die Voraussetzungen von Teil (a). Somit gilt für das Existenzintervall $(t_-, t_+)$ entweder $t_+ = \infty$ oder $\lim_{t \to t_+} |u(t)| = \infty$. Angenommen $t_+ \neq \infty$. Da $u$ wie oben streng monoton wachsend ist, muss gelten $\lim_{t \to t_+} u(t) = \infty$. Es folgt

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{f(s)} ds = \lim_{t \to t_+} \int_{y_0}^{u(t)} \frac{1}{f(s)} ds = \lim_{t \to t_+} \int_{t_0}^t \frac{u'(s)}{f(u(s))} ds = \lim_{t \to t_+} \int_{t_0}^t 1 ds = \infty.$$

Widerspruch. Somit gilt $t_+ = \infty$.