Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Tobias Hansel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 4./5.11.2008

Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen

2. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Lipschitzbedingungen)

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lokalen oder globalen Lipschitzbedingungen genügen.

1. $f(t, y) = y^2$
2. $f(t, y) = \frac{1}{1+y^2}$
3. $f(t, y) = e^t y$
4. $f(t, y) = \arctan(t + y)$

(b) Auf dem 1. Übungsblatt (Aufgabe G2) haben wir gezeigt, dass die Differentialgleichung $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$, $t \in \mathbb{R}$, mit Anfangswert $y(0) = 0$ unendlich viele Lösungen besitzt. Warum ist dies kein Widerspruch zu Kapitel II, Satz 1.6?

LÖSUNG: (a) 1. $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)| = 2\xi|y_1 - y_2|$ mit $\xi \in (y_1, y_2)$. Also genügt f einer lokalen aber keiner globalen Lipschitzbedingung.

2. Wir haben folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= \left|\frac{1}{1 + y_1^2} - \frac{1}{1 + y_2^2}\right| = \frac{|y_2^2 + 1 - (y_1^2 + 1)|}{(1 + y_1^2)(1 + y_2^2)} = \frac{|y_1 + y_2||y_1 - y_2|}{(1 + y_1^2)(1 + y_2^2)} \\
&\le \frac{(|y_1| + |y_2|)|y_1 - y_2|}{(1 + y_1^2)(1 + y_2^2)} \\
&= \left(\frac{|y_1|}{(1 + y_1^2)(1 + y_2^2)} + \frac{|y_2|}{(1 + y_1^2)(1 + y_2^2)}\right)|y_1 - y_2| \\
&\le \Bigg(\underbrace{\frac{|y_1|}{1 + y_1^2}}_{\le \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{|y_2|}{1 + y_2^2}}_{\le \frac{1}{2}}\Bigg)|y_1 - y_2| \le |y_1 - y_2|.
\end{aligned}$$

Also genügt f einer globalen Lipschitzbedingung mit Lipschitz-Konstante $L = 1$.

3. $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |e^t y_1 - e^t y_2| = e^t|y_1 - y_2|$. Also genügt f einer lokalen aber keiner globalen Lipschitzbedingung.

4. Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+(t+y)^2}$ ist beschränkt auf ganz $\mathbb{R}^2$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt für alle $(t, y_1), (t, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi)\right| |y_1 - y_2|,$$

mit $\xi \in (y_1, y_2)$. Daher genügt f einer globalen Lipschitzbedingung mit Lipschitz-Konstante $L = \sup\{|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)| : (t,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

(b) Kapitel II, Satz 1.6 garantiert die Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0$, unter der Voraussetzung, dass $f(t,y)$ in y lokal Lipschitz-stetig ist. Die Funktion $f(t,y) = \sqrt{|y|}$ ist allerdings in 0 nicht Lipschitz-stetig. Anschaulich gesprochen liegt dies am senkrechten Anstieg der Wurzelfunktion bei $y = 0$. Angenommen f genüge einer Lipschitzbedingung in einer Umgebung U von $y = 0$, dann gilt $|\sqrt{|y|} - 0| \le L|y - 0|$, für eine geeignete Konstante L und alle $y \in U$. Hieraus folgt aber, dass $\frac{\sqrt{|y|}}{y} = \frac{1}{\sqrt{|y|}} \le L$ für alle $y \in U$. Dies ist ein Widerspruch, denn $\frac{1}{\sqrt{|y|}} \stackrel{y\to 0}{\longrightarrow} \infty$.

(G 2)

Bei der Neueröffnung eines großen Supermarktes befinden sich 5000 Euromünzen mit deutscher Prägung in der Kasse. Pro Tag werden der Kasse 250 Euromünzen zugeführt, von denen 10 ausländische Prägung haben. Ebenso werden täglich 250 Münzen aus der Kasse ausgegeben. Die Konzentration ausländischer Euromünzen in der Kasse soll als differenzierbare Funktion angenommen werden.

a) Stellen Sie für die Konzentration der Euromünzen mit ausländischer Prägung eine Differenzialgleichung auf.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem.

c) Berechnen Sie die Konzentration für $t \to \infty$.

LÖSUNG: (a) Wir beschreiben die Konzentration der Euromünzen mit ausländischer Prägung durch die Funktion $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Folgende Annahmen an y machen Sinn:

1. y wächst in der Zeit, d.h $y'(t) > 0$ für alle t.
2. y' fällt mit wachsendem y, da sich y immer mehr der Konzentration die zugeführt wird annähert.
3. Falls $y(t) = \frac{10}{250}$, dann muss $y'(t) = 0$ sein.

Aus diesen drei Bedingungen können wir schließen, dass y' propotional zu $\frac{10}{250} - y$ ist, d.h

$$y'(t) = c\left(\frac{10}{250} - y(t)\right),$$

für eine Konstante c, die wir später noch spezifizieren.

(b) Als Anfangswert haben wir $y(0) = 0$. Trennung der Variablen liefert

$$\int_0^y \frac{1}{\frac{10}{250} - \xi}\, d\xi = \int_0^t c\, d\tau \iff \log\left(\frac{10}{250} - y\right) = -ct + \log\left(\frac{10}{250}\right) \iff y(t) = \frac{10}{250}\left(1 - e^{-ct}\right).$$

Am ersten Tag ist die Konzentration $y(1) = \frac{10}{5250}$. Hieraus lässt sich nun die Konstante c bestimmen:

$$\frac{10}{5250} = \frac{10}{250}(1 - e^{-c}) \iff e^{-c} = \frac{5000}{5250} \iff c = -\log\left(\frac{5000}{5250}\right).$$

Somit erhalten wir als Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = \frac{10}{250}\left(1 - e^{\log\left(\frac{5000}{5250}\right)t}\right), \qquad (t \ge 0).$$

(c) Wegen $\log\left(\frac{5000}{5250}\right) < 0$ gilt $y(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{10}{250}$. Somit nähert sich y mit zunehmender Zeit immer mehr der Konzentration an die zugeführt wird.

(G 3) (Äquivalente Metrik)

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Wir betrachten den Raum $C(I, \mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}^n$ versehen mit der üblichen Metrik d, definiert durch

$$d(u, v) := \sup_{t\in I} \|u(t) - v(t)\|_2, \quad u, v \in C(I, \mathbb{R}^n),$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

(a) Sei $L \geq 0$. Zeigen Sie, dass $\tilde{d}$ definiert durch

$$\tilde{d}(u, v) := \sup_{t\in I} \|e^{-(L+1)t}(u(t) - v(t))\|_2, \quad u, v \in C(I, \mathbb{R}^n),$$

ebenfalls eine Metrik auf dem Raum $C(I, \mathbb{R}^n)$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Metrik $\tilde{d}$ äquivalent zur Metrik d ist, d.h. es existieren Kontanten $0 < m \leq M$ mit

$$m\, d(u, v) \leq \tilde{d}(u, v) \leq M\, d(u, v),$$

für alle $u, v \in C(I, \mathbb{R}^n)$.

(c) Nun sei (X, d) ein beliebiger metrischer Raum und $\tilde{d}$ eine zu d äquivalente Metrik. Zeigen Sie, dass der metrische Raum $(X, \tilde{d})$ genau dann vollständig ist, falls (X, d) vollständig ist.

LÖSUNG: (a) Die Eigenschaften einer Metrik sind klar: Für alle $u, v, w \in C(I, \mathbb{R}^n)$ gilt

1. $\tilde{d}(u, v) \geq 0$,
2. $\tilde{d}(u, v) = 0 \iff u = v$,
3. $\tilde{d}(u, v) = \tilde{d}(v, u)$,
4. $\tilde{d}(u, v) \leq \tilde{d}(u, w) + \tilde{d}(w, v)$.

Somit ist $\tilde{d}$ eine Metrik.

(b) Für alle $t \in [a, b]$ gilt

$$e^{-(L+1)b} \leq e^{-(L+1)t} \leq e^{-(L+1)a}.$$

Somit kann $m = e^{-(L+1)b}$ und $M = e^{-(L+1)a}$ gewählt werden. Dies beweist die Äquivalenz.

(c) Wegen der Äquivalenz von d und $\tilde{d}$ existieren Konstanten $0 < m \leq M$ mit

$$m\, d(x, y) \leq \tilde{d}(x, y) \leq M\, d(x, y),$$

für alle $x, y \in X$. Sei (X, d) vollständig und $(x_k)_k \subset X$ eine Cauchy-Folge bzgl. der Metrik $\tilde{d}$. Da für alle $k, l \in \mathbb{N}$

$$d(x_k, x_l) \leq \frac{1}{m}\tilde{d}(x_k, x_l)$$

gilt, folgt dass $(x_k)_k$ ebenfalls eine Cauchy-Folge bzgl. der Metrik d ist. Wegen der Vollständigkeit von (X, d) konvergiert $(x_k)_k$ gegen ein $x \in X$. Da für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{d}(x_k, x) \leq M d(x_k, x)$$

gilt, konvergiert $(x_k)_k$ auch bzgl. der Metrik $\tilde{d}$ gegen $x \in X$. Die andere Richtung geht analog.

Hausübungen

(H 1) (Symmetrie von Lösungen)

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitzbedingung genüge. Es gelte $f(-t, x) = -f(t, x)$ für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie: Ist $r > 0$, so ist jede Lösung $u : [-r, r] \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = f(t, y(t))$ eine gerade Funktion, das heißt $u(t) = u(-t)$.

LÖSUNG: Ist $u : [-r, r] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der DGL, so ist auch $h : [-r, r] \to \mathbb{R}^n$ mit $h(t) := u(-t)$ eine Lösung, denn aus der Kettenregel folgt

$$h'(t) = -u'(-t) = -f(-t, u(-t)) = f(t, h(t)).$$

Da $h(0) = u(0)$ gilt, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz (Kapitel II, Satz 1.6), dass $h(t) = u(-t) = u(t)$ für alle $t \in [-r, r]$.

(H 2) (Lipschitzbedingung)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, so genügt f in D einer lokalen Lipschitzbedingung.

(b) Genügt f in der offenen Menge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ einer lokalen Lipschitzbedingung und ist $K \subset D$ kompakt, so genügt f in K einer Lipschitzbedingung.

LÖSUNG: (a) Kurze Vorbemerkung: Aus Analysis II wissen wir, dass auf $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind. Somit können wir hier $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen.
Sei nun $(t_0, x_0) \in D$. Dann gibt es eine offene Kugel $U_r(t_0, x_0) \subset D$ um (t_0, x_0) mit Radius $r > 0$, so dass $V := \overline{U_r(t_0, x_0)} \subset D$ (hier bezeichnet $\overline{U_r(t_0, x_0)}$ den Abschluß von $U_r(t_0, x_0)$).
Die Menge V ist kompakt und konvex. Für $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ schreiben wir nun $f = (f_1, \ldots, f_n)$, wobei $f_i : D \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$.
Da $(t, x) \mapsto \nabla f_i(t, x)$, für $i = 1, \ldots, n$, eine stetige Funktion ist und stetige reellwertige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Maximum annehmen, folgt die Existenz von

$$L_i := \max\{\|\nabla f_i(t, x)\|_\infty : (t, x) \in V\}$$

für $i = 1, \ldots, n$. Aus dem Schrankensatz (Analysis II, Kapitel VI, Satz 2.9) folgt

$$|f_i(t, x) - f_i(t, y)| \leq L_i \|x - y\|_\infty$$

für alle $(t, x), (t, y) \in V$ und $i = 1, \ldots, n$. Insbesondere erhalten wir nun mit $L := \max_i L_i$ die Abschätzung

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_\infty = \max_i |f_i(t, x) - f_i(t, y)| \leq L\|x - y\|_\infty$$

für alle $(t, x), (t, y) \in V$. Somit genügt f einer lokalen Lipschitzbedingung.

(b) Wäre die Aussage falsch, dann gäbe es zu jedem $L \geq 0$ zwei Punkte $(t, x), (t, y) \in K$ mit $\|f(t, x) - f(t, y)\|_2 > L$. Insbesondere gibt es dann zwei Folgen $((t_n, x_n))_n$ und $((t_n, y_n))_n$ in K mit

$$\|f(t_n, x_n) - f(t_n, y_n)\|_2 > n\|x_n - y_n\|_2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Wegen der Kompaktheit von K existieren konvergente Teilfolgen $(t_{n_k})_k$, $(x_{n_k})_k$ und$(y_{n_k})_k$, deren Grenzwerte wir mit t, x und y bezeichnen. Wir betrachten nun Ungleichung (1) nur noch für die konvergenten Teilfolgen. Für $k \to \infty$ konvergiert die linke Seite von (1), also muss wegen des Faktors n_k auf der rechten Seite $(\|x_{n_k} - y_{n_k}\|_2)_k$ eine Nullfolge sein, d.h. $x = y$. Auf Grund der vorausgesetzten lokalen Lipschitzbedingung von f gibt es eine Umgebung U

von (t,x), so dass die Einschränkung von f auf $U \cap K$ einer Lipschitzbedingung genügt, also gilt

$$\|f(\tilde{t},\tilde{x}) - f(\tilde{t},\tilde{y})\|_2 \le \tilde{L}\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_2,$$

für eine geeignete Konstante $\tilde{L} > 0$ und alle $(\tilde{t},\tilde{x}), (\tilde{t},\tilde{y}) \in U \cap K$. Für hinreichend großes k liegen die Punkte (t_{n_k}, x_{n_k}) und (t_{n_k}, y_{n_k}) in $U \cap K$ und somit gilt für diese n_k die Abschätzung

$$\|f(t_{n_k}, x_{n_k}) - f(t_{n_k}, y_{n_k})\|_2 \le \tilde{L}\|x_{n_k} - y_{n_k}\|_2.$$

Dies ist aber für $n_k > \tilde{L}$ ein Widerspruch zu (1).

(H 3)

Gegeben sei die Differentialgleichung $y'(t) = 2ty$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

(a) Besitzt diese DGL auf einer hinreichend kleinen Umgebung von $t_0 = 0$ eine eindeutige Lösung?

(b) Lösen Sie diese DGL mit einer Lösungsmethode aus Kapitel I.

(c) Führen Sie die Picard-Iteration durch (vgl. Kapitel II, Bermerkung 1.3) und berechnen Sie die Iterationsfolge $u_n(t)$. Geben Sie ein möglichst großes Intervall an auf dem die Iterationsfolge $u_n(t)$ gleichmäßig gegen die Lösung $u(t)$ konvergiert.

Lösung: (a) Die Funktion $f(t,y) = 2ty$ genügt einer lokalen Lipschitzbedingung, denn

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = 2t|y_1 - y_2|.$$

Somit garantiert die lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf (Kapitel II, Satz 1.8), dass das Anfangswertproblem auf einer hinreichend kleinen Umgebung von $t_0 = 0$ eine eindeutige Lösung besitzt. Die Existenz und Eindeutigkeit folgt ebenfalls aus Kapitel I, Satz 2.1 (Trennung der Variablen).

(b) Mit Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\int_1^u \frac{1}{\xi}\, d\xi = \int_0^t 2\tau\, d\tau \iff \log(u) = t^2.$$

Somit ist $u(t) = e^{t^2}, t \in \mathbb{R}$, die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

(c) Als Startfunktion nehmen wir den Anfangswert und berechnen:

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= 1 \\
u_1(t) &= 1 + \int_0^t 2x \cdot 1 dx = 1 + t^2 \\
u_2(t) &= 1 + \int_0^t 2x(1+x^2)dx = 1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4 \\
u_3(t) &= 1 + \int_0^t 2x(1+x^2+\frac{1}{2}x^4)dx = 1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{6}t^6
\end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir

$$\begin{aligned}
u_n(t) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{t^{2j}}{j!}, \\
u_{n+1}(t) &= 1 + \int_0^t 2xu_n(x)\, dx = 1 + 2\sum_{j=0}^{n} \int_0^t \frac{x^{2j+1}}{j!}\, dx \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{n} \frac{2t^{2j+1}}{2(j+1)j!} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{t^{2j}}{j!}.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösung des Anfangswertproblems

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{j!} = e^{t^2}.$$

Die lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf (Kapitel II, Satz 1.8) garantiert die gleichmäßige Konvergenz des Iterationsverfahrens auf einer hinreichend kleinen Umgebung von $t_0 = 0$. Allerdings konvergiert in dieser Aufgabe das Iterationsverfahren auf ganz $\mathbb{R}$ und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$, da die Lösung u durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ gegeben ist.