Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 21./22.10.2008

Analysis III – Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Bestimmen Sie Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta > -1$ so, dass die Funktion $y : (-\beta, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = \alpha \ln(x + \beta)$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \mathrm{e}^{x - y(x) - \mathrm{e}^{y(x)}}, \quad y(1) = 0$$

ist.

(b) Geben Sie ein Anfangswertproblem an, dessen Lösung die Funktion $y(x) = \tan(\mathrm{e}^x)$ ist.

Lösung: (a) Für $y(x) = \alpha \ln(x + \beta)$ gilt

$$y(1) = \alpha \ln(1 + \beta).$$

Damit dieses Null ist (Anfangswert), kann entweder $\alpha = 0$ sein. Dann ist aber $y \equiv 0$ und das ist keine Lösung der Differentialgleichung, denn $\mathrm{e}^{x-0-\mathrm{e}^0} = \mathrm{e}^{x-1} \neq 0 = y'(x)$ in diesem Falle. Also muss $\ln(1 + \beta) = 0$ sein, was zu $\beta = 0$ führt. Wir setzen also $y(x) = \alpha \ln(x) = \ln(x^\alpha)$ in die Differentialgleichung ein:

$$y'(x) = \frac{\alpha}{x} \stackrel{!}{=} \mathrm{e}^{x-y(x)-\mathrm{e}^{y(x)}} = \mathrm{e}^x x^{-\alpha} \mathrm{e}^{-x^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{e}^{x - x^\alpha}.$$

Nun ist scharfes Hinschauen gefragt: Um den Nenner einzustellen, wäre $\alpha = 1$ eine gute Wahl. Das räumt freundlicherweise auch die Exponentialfunktionen auf! Also wählen wir $\beta = 0$ und $\alpha = 1$ und landen bei $y(x) = \ln(x)$.

(b) Hier kann man der Fantasie freien Lauf lassen. Es gilt

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (1 + \tan^2(\mathrm{e}^x))\mathrm{e}^x \\
y''(x) &= 2\tan(\mathrm{e}^x)\big(1 + \tan^2(\mathrm{e}^x)\big)\mathrm{e}^x\mathrm{e}^x + (1 + \tan^2(\mathrm{e}^x))\mathrm{e}^x = 2y(x)y'(x)\mathrm{e}^x + y'(x)
\end{aligned}$$

Ein schöner Anfangswert ist $y(\ln(\pi/4)) = \tan(\pi/4) = 1$. Ein mögliches Anfangswertproblem wäre also

$$\begin{cases} y''(x) = \big(2\mathrm{e}^x y(x) + 1\big)y'(x) \\ y(\ln(\pi/4)) = 1. \end{cases}$$

(G 2)

Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(x) = \sqrt{|y(x)|},\ x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{4}, & \text{falls } x \geq x_0, \\ 0, & \text{falls } x < x_0 \end{cases}$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist und erraten Sie noch eine weitere (offensichtliche) Lösung.

(b) Skizzieren Sie eine Auswahl dieser Lösungen in ein Schaubild.

(c) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem zu dieser Differentialgleichung mit $y(0) = 0$ unendlich viele Lösungen hat.

LÖSUNG: (a) Für alle $x < x_0$ gilt $y'(x) = 0 = \sqrt{|0|} = \sqrt{|y(x)|}$ und auch für alle $x > x_0$ haben wir

$$y'(x) = \frac{1}{2}(x - x_0) = \frac{1}{2}|x - x_0| = \sqrt{\left|\frac{(x - x_0)^2}{4}\right|} = \sqrt{|y(x)|}.$$

Wir untersuchen also noch $x = x_0$. Es gilt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{h^2 - 0}{4h} = \lim_{h \searrow 0} h = 0$$

und

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Also ist y stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ (man beachte, dass das eine der Bedingungen aus der Definition von Lösung einer Differentialgleichung ist!) und es gilt auch in x_0

$$y'(x_0) = 0 = \sqrt{|y(x_0)|}.$$

Die weitere leicht zu erratende Lösung ist $y \equiv 0$.

(b)

(c) Nach Teil (a) ist jede Funktion der Form

$$y_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{4}, & \text{falls } x \geq x_0, \\ 0, & \text{falls } x < x_0 \end{cases}$$

eine Lösung der Differentialgleichung und für alle $x_0 \geq 0$ gilt auch $y_{x_0}(0) = 0$. Für alle $x_0 \geq 0$ ist also y_{x_0} eine Lösung des Anfangswertproblems und diese Lösungen sind auch alle offensichtlich verschieden. Da es unendlich viele positive reelle Zahlen gibt, hat das gegebene Anfangswertproblem damit unendlich viele verschiedene Lösungen.

(G 3)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass jede Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Bemerkung: Eine solche Differentialgleichung, bei der f nicht von x abhängt, nennt man *autonome Differentialgleichung.* Betrachten Sie sich im Lichte dieses Ergebnisses auch noch mal die Lösungen aus Aufgabe G2.

LÖSUNG:

Behauptung: Jede Lösung einer autonomen Differentialgleichung ist monoton.

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe eine nicht monotone Lösung y auf einem Intervall I. Als Lösung einer Differentialgleichung ist y auf jeden Fall stetig differenzierbar und da y nicht monoton ist, gibt es $a, b \in I$ mit $y'(a) > 0$ und $y'(b) < 0$.

Wir betrachten oBdA den Fall $a < b$ und $y(a) \leq y(b)$. Die anderen gehen analog. Dann hat $y|_{[a,b]}$ als stetige Funktion auf einem Kompaktum eine globale Maximalstelle ξ in $[a, b]$ und da $y'(b) < 0$ ist, muss $y(\xi) > y(b)$ gelten.

Wir setzen $\eta := \max\{x \in [a, \xi] : y(x) = y(b)\}$. Man beachte, dass diese Menge nicht leer ist, da es nach dem Zwischenwertsatz wegen $y(\xi) > y(b) \geq y(a)$ zumindest einen Punkt zwischen a und ξ geben muss, an dem y den Wert $y(b)$ annimmt. Weiterhin gilt wegen $y(b) < y(\xi)$ sofort $\eta < \xi$.

Betrachten wir nun ein $x \in (\eta, \xi)$ und nehmen an es wäre $y(x) \leq y(b)$, so gibt es wegen $y(\xi) > y(b)$ wieder nach dem Zwischenwertsatz ein $\tilde{x} \in [x, \xi)$ mit $y(\tilde{x}) = y(b)$, im Widerspruch zur Maximalität von η. Es gilt also $y(x) > y(b) = y(\eta)$ für alle $x \in (\eta, \xi)$.

Damit haben wir für alle $h > 0$, die so klein sind, dass $\eta + h < \xi$ ist,

$$\frac{y(\eta + h) - y(\eta)}{h} > 0.$$

Lassen wir $h \to 0$ gehen, erhalten wir also $y'(\eta) \geq 0$. Das impliziert schließlich mit Hilfe der Differentialgleichung den Widerspruch

$$0 \leq y'(\eta) = f(y(\eta)) = f(y(b)) = y'(b) < 0.$$

Also war unsere Annahme falsch und jede Lösung ist monoton. □

Hausübungen

(H 1)

Wir betrachten die Differentialgleichung $y'(x) = \sin^2(x)$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie alle $y_0 \in \mathbb{R}$, für die das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sin^2(x), \quad y(0) = y_0$$

eindeutig lösbar ist.

(c) Warum war diese Differentialgleichung so einfach?

LÖSUNG: (a) Gesucht sind alle stetig differenzierbaren Funktionen y mit Ableitung $\sin^2(x)$. Das sind genau die Stammfunktionen dieser Funktion. Wegen (vgl. Ana I)

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

bekommen wir also die Lösungen

$$y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Setzt man in die allgemeine Lösung aus (a) den Anfangswert ein, erhält man

$$y(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4}\sin(0) + C = C \overset{!}{=} y_0.$$

Das Anfangswertproblem ist also für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar.

(c) Bei dieser Differentialgleichung hängt die rechte Seite überhaupt nicht von y ab, in der üblichen Nomenklatur $y'(x) = f(x, y)$ haben wir also $f(x, y) = f(x)$. In diesem Fall reduziert sich das Problem auf das Auffinden von Stammfunktionen.

(H 2)

Es sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $y(x) = \frac{1-4e^{5x}}{1+e^{5x}}$, $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass y Lösung einer Differentialgleichung der Form $y'(x) = \alpha y(x)^2 + \beta y(x) + \gamma$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist und bestimmen Sie α, β und γ. Geben Sie weiter ein Anfangswertproblem an, dessen Lösung y ist.

Lösung: Wir bestimmen y' und setzen in die Differentialgleichung ein:

$$
\begin{aligned}
y'(x) = \frac{-20e^{5x}(1+e^{5x}) - 5e^{5x}(1-4e^{5x})}{(1+e^{5x})^2} &= \frac{-25e^{5x}}{(1+e^{5x})^2} \stackrel{!}{=} \alpha\left(\frac{1-4e^{5x}}{1+e^{5x}}\right)^2 + \beta\frac{1-4e^{5x}}{1+e^{5x}} + \gamma \\
\iff -25e^{5x} &= \alpha(1-4e^{5x})^2 + \beta(1-4e^{5x})(1+e^{5x}) + \gamma(1+e^{5x})^2 \\
&= \alpha + \beta + \gamma + e^{5x}(-8\alpha - 3\beta + 2\gamma) + e^{10x}(16\alpha - 4\beta + \gamma).
\end{aligned}
$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das LGS

$$
\begin{cases}
\alpha + \beta + \gamma & = 0 \\
-8\alpha - 3\beta + 2\gamma & = -25 \\
16\alpha - 4\beta + \gamma & = 0,
\end{cases}
$$

dessen Lösung $\alpha = 1$, $\beta = 3$ und $\gamma = -4$ ist.

Damit erfüllt für diese Werte von α, β, γ die Funktion y die Differentialgleichung.

Wegen

$$y(0) = \frac{1-4}{1+1} = -\frac{3}{2},$$

wäre ein mögliches Anfangswertproblem

$$
\begin{cases}
y'(x) & = y(x)^2 + 3y(x) - 4 \\
y(0) & = -3/2.
\end{cases}
$$

(H 3)

(a) Es sei $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es sei $y'(a) < \lambda < y'(b)$. Begründen Sie, dass dann ein $x_0 \in (a, b)$ existiert mit $y'(x_0) = \lambda$.

(b) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$
f(y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } y \in \mathbb{Q}, \\ 2, & \text{falls } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}
$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass die Differentialgleichung $y' = f(y)$ keine Lösung besitzt.

Lösung: (a) Die Behauptung ist genau die Aussage des Korollares IV.2.5. e) aus der Vorlesung Analysis I.

Der Vollständigkeit halber ist hier ein Beweis:

Behauptung: $y'(a) < \lambda < y'(b) \Longrightarrow \exists x_0 \in (a, b) : y'(x_0) = \lambda$.

Beweis: Wir betrachten die Hilfsfunktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = y(x) - \lambda x$. Dann gilt $g'(x) = y'(x) - \lambda$ für alle $x \in [a, b]$.

Nehmen wir nun an, es wäre $g(x) \geq g(a)$ für alle $x \in (a, b)$, so hätten wir für alle diese x:

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq 0$$

und damit $g'(a) \geq 0$ im Grenzwert. Also gibt es ein $\eta \in (a, b)$ mit $g(\eta) < g(a)$.

Analog zeigt man, dass es ein $\xi \in (a, b)$ gibt mit $g(\xi) < g(b)$.

Das bedeutet nun, dass $\min_{x \in [a,b]} g(x) < \min\{g(a), g(b)\}$ ist. Also hat g im Inneren (a, b) eine globale Minimalstelle x_0. Für diese gilt dann aber

$$y'(x_0) - \lambda = g'(x_0) = 0, \text{ d.h. } y'(x_0) = \lambda.$$

$\square$

(b) Wir nehmen an, es gäbe eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ obiger Gleichung auf einem Intervall I. Dann gilt $y'(x) = f(y(x)) \in \{1, 2\}$ für alle $x \in I$. Nach Teil (a) ist das aber nur möglich, wenn entweder $y'(x) = 1$ für alle $x \in I$ oder $y'(x) = 2$ für alle $x \in I$ gilt.

Im ersten Fall ($y'(x) = 1$ für alle $x \in I$) gibt es dann eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $y(x) = x + C$ für alle $x \in I$. Wählen wir nun ein $\xi \in I$ mit $\xi + C \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so erhalten wir den Widerspruch

$$1 = y'(\xi) = f(y(\xi)) = f(\xi + C) = 2.$$

Im zweiten Fall gilt analog $y(x) = 2x + C$ für ein $C \in \mathbb{R}$ und wir können dieses Mal ein $\xi \in I$ mit $2\xi + C \in \mathbb{Q}$ wählen, um wieder den Widerspruch

$$2 = y'(\xi) = f(2\xi + C) = 1$$

zu erhalten.

Also kann die gegebene Differentialgleichung keine Lösung besitzen.