**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2009 9.7.2009

# Höhere Mathematik II

## 11. Übung mit Lösungshinweisen

Abgabe Hausübungen: W. –Keine abgabe

## Gruppenübungen

**(G 26)**

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

(A) Das charakteristische Polynom von $A$ ist

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= |B - \lambda I_2| \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda)+4 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 9 \end{aligned}$$

die Eigenwerte von $A$, d.h. Nullstellen von $p_A$, sind $\lambda = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$ (mit Vielfachheit 2). Der zugehörige Eigenvektor finden wir aus der Gleichung

$$\begin{cases} -2x + 4y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \end{cases}$$

d.h. $x = 2y$ und somit ist (z.B.) $v = (2,1)^T$ Eigenvektor zum Eigenwert 3 .

(B) Das charakteristische Polynom von $A$ ist

$$
\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= |A-\lambda I_2| \\
&= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)-2 \\
&= \lambda^2-4\lambda+1
\end{aligned}
$$

die Eigenwerten von $A$, d.h. die Nullstellen von $p_A,(\lambda)$ sind $\lambda = 2\pm\sqrt{2^2-1} = 2\pm\sqrt{3}$. Sei $\lambda_1 = 2+\sqrt{3}$ und $\lambda_2 = 2-\sqrt{3}$. Die zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (x_1, y_1)^T$, $v_2 = (x_2, y_2)^T$ berechnen wir jetzt:

$$
\begin{aligned}
Av_1 &= \lambda_1 v_1 \Leftrightarrow (A-\lambda_1)\, v_1 = (0,0)^T \\
&\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} \left(3-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)x_1+y_1 &= 0 \\ 2x_1+\left(1-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)y_1 &= 0 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} \left(1-\sqrt{3}\right)x_1+y_1 &= 0 \\ 2x_1+\left(1-\sqrt{3}\right)y_1 &= 0 \end{cases}
$$

weil die Eigenräume 1-dimensional sein müssen ist es klar, dass die beide Gleichungen linear abhängig sind. D.h. die Eigenvektoren sind einfach durch

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-1}{1-\sqrt{3}}y_1 = \frac{-\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}y_1 \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)y_1
\end{aligned}
$$

gegeben, d.h. $v_1 = \left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right), 1\right)^T$. Auf die gleiche Weise bestimmen wir $v_2$ aus der Gleichung $\left(3-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)x_2+y_2 = 0 \Leftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{-1}{1+\sqrt{3}}y_2 = \frac{-\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}y_2 \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)y_2
\end{aligned}
$$

d.h. $v_2 = \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right), 1\right)^T$.

(C) Das charakteristische Polynom von $C$ ist

$$\begin{aligned}
p_C(\lambda) &= |C-\lambda I_3| \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -4\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -16(1-\lambda)+(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-6\right] \\
&= (1-\lambda)\left[-16+(1-\lambda)^2-6\right] \\
&= (1-\lambda)\left[\lambda^2-2\lambda-21\right]
\end{aligned}$$

die Nullstellen sind damit $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{22}$. Die zugehörigen Eigenvektoren bestimmen wir aus dem Gleichungsystem:

Für $\lambda_1 = 1$ gilt

$$\begin{cases} 2y & = 0 \\ 3x+4z & = 0 \\ 4y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y & = 0, \\ x & = -\frac{4}{3}z. \end{cases}$$

Für $\lambda_2 = 1+\sqrt{22}$ gilt

$$\begin{cases} \left(-\sqrt{22}\right)x+2y & = 0 \\ 3x+\left(-\sqrt{22}\right)y+4z & = 0 \\ 4y+\left(-\sqrt{22}\right)z & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = \frac{2}{\sqrt{22}}y, \\ y & = \frac{\sqrt{22}}{4}z \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}z.$$

Für $\lambda_3 = 1-\sqrt{22}$ gilt

$$\begin{cases} \sqrt{22}x+2y & = 0 \\ 3x+\sqrt{22}y+4z & = 0 \\ 4y+\sqrt{22}z & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = -\frac{2}{\sqrt{22}}y, \\ y & = -\frac{\sqrt{22}}{4}z \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}z.$$

Als Eigenvektoren können wir damit $v_1 = \left(-\frac{4}{3},0,1\right)^T$, $v_2 = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\sqrt{22},1\right)^T$ und $v_3 = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\sqrt{22},1\right)^T$ wählen.

**(G 27)**

Seien $b_1 = (1,0,1)^T$, $b_2 = (1,1,0)^T$ und $b_3 = (0,2,1)^T$.

(a) Zeigen Sie, dass $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ ein Basis für $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinatenvektor $(x_1, x_2, x_3)$ bezüglich $B$. Geben Sie die Koordinatenvektor für $x$ bezüglich der Standardbasis an.

(c) Berechnen Sie die Inverse der Basistransformationsmatrix von $B$ zum Standardbasis.

LÖSUNG:

(a) Zu zeigen ist, dass die Vektoren linear unabhängig sind. Wir stellen deswegen die Matrix auf und zeigen mit Hilfe des Gaussverfahren, dass der Rang drei ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \quad r_3 \to r_3 - r_1$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \quad r_3 \to r_3 + r_2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hier ist klar ersichtlich, dass der Rang drei ist. Es folgt, dass die Vektoren $b_1, b_2$und $b_3$ linear unabhängig sind und damit ein Basis bilden.

(b) Die Basistransformationsmatrix für $\{b_1, b_2, b_3\}$ bezüglich der Standardbasis ist

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $x$ hat Koordinaten $(x_1, x_2, x_3)_B$ bezüglich $B$ und $(y_1, y_2, y_3)$ bzgl. der Standardbasis vom $\mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

d.h. $x = (x_1, x_2, x_3)_B^T$ hat den Koordinatenvektor $(x_1 + x_2, x_2 + 2x_3, x_1 + x_3)^T$ bzgl. der Standardbasis.

(c) Die Inverse für $B$ berechnen wir einfach mit dem Gaussverfahren wie folgt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \quad r_3 \to r_3 - r_1$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \quad r_1 \to r_2, r_3 \to r_3 + r_2$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \quad r_3 \to \frac{1}{3} r_3$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \quad r_1 \to r_1 + 2r_3,\, r_2 \to r_2 - 2r_3$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

es folgt, dass

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Hausübungen

**(H 11) [2+3+2+3P]**

Seien $b_1 = (1,0,1)^T$, $b_2 = (1,1,0)^T$ und $b_3 = (0,2,1)^T$. Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist durch $\varphi(b_1) = b_1$, $\varphi(b_3) = 2b_2 + b_3$, $\varphi(b_2) = 2b_2$ definiert.

(a) Was ist die Matrix für $\varphi$ in die Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$?

(b) Bestimmen Sie die Matrix von $\varphi$ bezüglich der Standardbasis.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\varphi$.

(d) Geben Sie eine Basis für $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren von $\varphi$ besteht.

LÖSUNG:

(a) In die Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ hat $\varphi$ offensichtlich die Matrixdarstellung:

$$\begin{pmatrix} \varphi(b_1) & \varphi(b_2) & \varphi(b_3) \end{pmatrix} = \Phi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $x \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinatenvektoren $(x_1, x_2, x_3)_B$ bzw. $\left(x_1', x_2', x_3'\right)$ bzgl. $B$ bzw. der Standardbasis. Seien weiterhin die Koordinatenvektoren von $y = \varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ bzgl. $B$ bzw. der Standardbasis $(y_1, y_2, y_3)_B$ bzw. $\left(y_1', y_2', y_3'\right)$ . Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_B &= \Phi_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B \\
&\Leftrightarrow \\
B \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_B &= \Phi_B B \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} &= B^{-1} \Phi_B B \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D.h. die Matrix für $\varphi$ bzgl. der Standardbasis ist

$$\begin{aligned}
B^{-1} \Phi_B B &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \Phi.
\end{aligned}$$

(b) Die Eigenwerte ändern sich nicht unter Basistransformation, deswegen können wir die Eigenwerten aus der Matrix bzgl. $B$ bestimmen.

$$p_{\Phi_B}(\lambda) = |\Phi_B - \lambda I_3| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)^2 (2-\lambda)$$

die Eigenwerte sind damit $\lambda_{1,2} = 1$ und $\lambda_3 = 2$.

(c)

In der Basis $B$ ist es klar, dass $v_1 = (1,0,0)_B$ und $v_3 = (0,1,0)_B$ Eigenvektoren mit Eigenwert 1 bzw 2 sind. Man sieht auch einfach das $\Phi_B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ somit ist durch $v_2 = (0,-2,1)_B$ ein zweiter Eigenvektor zum Eigenwert 1 gegeben.

Die Eigenwerte sind unabhängig von der Basis aber die Eigenvektoren nicht. Wir berechnen daher die Eigenvektoren bzgl. der Standardbasis. Weil

$$\Phi\left(B^{-1}v_j\right) = B^{-1}\Phi_B B\left(B^{-1}v_j\right) = B^{-1}\Phi_B v_j = B^{-1}\lambda_j v_j = \lambda_j B^{-1} v_j$$

ist es klar, dass die Vektoren $v_1' = B^{-1}v_1$, $v_2' = B^{-1}v_2$ und $v_3' = B^{-1}v_3$ Eigenvektoren zu $\varphi$ mit Eigenwert $1, 1$ und $2$ sind.

$$\begin{aligned}
v_1' &= B^{-1}v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
v_2' &= B^{-1}v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
v_3' &= B^{-1}v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Weil die Vektoren $v_1, v_2$ und $v_3$ linear unabhängig sind, sind auch $v_1', v_2', v_3'$ linear Unabhängig und bilden damit ein Basis von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von $\varphi$.